

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



*на правах рукописи*

УДК 534.24

КУЦОВ МИХАИЛ ВИКТОРОВИЧ

**ЧАСТОТНЫЕ СМЕЩЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ МАКСИМУМОВ  
ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В МЕЛКОВОДНЫХ ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ**

Специальность 01.04.06 – акустика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
Пересёлков Сергей Алексеевич

Воронеж – 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Интерференция звука в мелком море.....</b>	<b>13</b>
§ 1.1. Краткое введение .....	13
§ 1.2. Модовое описание звукового поля .....	13
§ 1.3. Океанические неоднородности .....	16
§ 1.4. Интерференционная структура звукового поля .....	18
§ 1.5. Частотные смещения интерференционных максимумов .....	20
1.5.1. Временные частотные смещения.....	22
1.5.2. Пространственные частотные смещения.....	23
1.5.3. Методы измерений частотных смещений .....	24
§ 1.6. Мониторинг океанической среды .....	27
§ 1.7. Заключение .....	30
<b>Глава 2. Пространственная интерференция нормальных волн.....</b>	<b>31</b>
§ 2.1. Краткое введение .....	31
§ 2.2. Частотные смещения .....	31
2.2.1. Поперечное разнесение .....	36
2.2.2. Продольное разнесение.....	38
§ 2.3. Статистические характеристики акустических полей.....	40
2.3.1. Флуктуации интерференционного инварианта .....	40
2.3.2. Флуктуации фазы .....	41
§ 2.4. Заключение .....	43
<b>Глава 3. Влияние поверхностного волнения на интерференционную картину.....</b>	<b>44</b>
§ 3.1. Краткое введение .....	44
§ 3.2. Вариации интерференционного инварианта.....	44
§ 3.3. Временной спектр частотных смещений .....	47
§ 3.4. Связь временных спектров частотных смещений и поверхностного волнения.....	50
§ 3.5. Заключение .....	54

<b>Глава 4. Частотные смещения в присутствии солитона внутренних волн .....</b>	<b>55</b>
§ 4.1. Краткое введение .....	55
§ 4.2. Многомодовый режим распространения .....	55
§ 4.3. Маломодовый режим распространения .....	59
4.3.1. Движение солитонов вдоль акустической трассы.....	64
4.3.2. Движение солитонов под углом к акустической трассе .....	68
4.3.3. Восстановление характеристик солитона.....	73
§ 4.4. Заключение .....	75
<b>Глава 5. Восстановление интерференционной картины однотипных мод.....</b>	<b>76</b>
§ 5.1. Краткое введение .....	76
§ 5.2. Выделение составляющих интерференционной структуры .....	77
5.2.1. Двумерная интерференционная картина .....	78
5.2.2. Одномерная интерференционная картина.....	82
§ 5.3. Частотные смещения однотипных мод.....	85
§ 5.4. Заключение .....	87
<b>Заключение.....</b>	<b>88</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>89</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы**

Разработка перспективных методов мониторинга акваторий Мирового океана на протяжении многих лет является предметом активных теоретических и экспериментальных исследований [1, 2]. Всякая технико-экономическая деятельность под водой требует детальной информации о процессах, происходящих в глубине акватории. Прибрежной зоне свойственны сложные гидрологические нестационарные процессы. Оперативный мониторинг этой изменчивой ситуации весьма важен как с общеэкономической точки зрения, так и с точки зрения безопасности осуществления тех или иных подводных работ. Поэтому возможность, хотя бы частичного решения этой задачи акустическими средствами представляется весьма актуальной.

Традиционный подход к мониторингу океанических неоднородностей основан на многоракурсном облучении исследуемой акватории с последующим восстановлением двумерной или трехмерной картины распределения параметров среды, а в качестве исходной информации используются результаты измерения времени, амплитуды и фазы звуковых сигналов [3–5], распространяющихся вдоль лучевых (или модовых) траекторий. Результаты модельного восстановления возмущений водной среды представлены, например, в [6–9]. Реализация такого подхода связана с идентификацией лучей (или мод) с использованием адиабатического приближения, что не всегда выполнимо в условиях мелководного распространения.

В последнее время для решения обратной задачи получили развитие методы акустической интерферометрии. Многолетняя работа в данном направлении привела к представлению о стабильности и информативности такой характеристики интерференционной картины, как частотные смещения интерференционных максимумов (частотные смещения) волнового поля [10, 11]. Частотный сдвиг определяет смещение частоты излучения, необходимое для выравнивания изменений фаз мод, разфазировка которых вызвана изменениями условий распространения. Данная особенность обусловлена волноводной дисперсией, т.е. различием в частотной зависимости постоянных распространения разных мод.

Частотные смещения чувствительны к изменениям океанической среды, вызванным различного вида неоднородностями, что позволяет на основе этой информации осуществлять направленный мониторинг неоднородностей различной природы в мелководной океанической среде [12]. Весьма важно, что данный подход позволяет проводить мониторинг одновременно нескольких возмущений разной физической природы [13]. При этом имеется возможность восстановления не только определенных значений тех или иных параметров неоднородностей,

но и их пространственно-временных статистических изменений, что является достаточно новым направлением в теории и практике решения обратных задач. Результаты компьютерного моделирования и натурных экспериментов [12–16], правда, немногочисленных, демонстрируют высокую эффективность нового подхода к мониторингу для измерения характеристик неоднородностей.

Принципиальная схема предложенного мониторинга основана на следующих соображениях. Возмущение среды, вызывающее изменение дисперсионной характеристики волнового канала, изменяет интерференционную структуру распространяющегося поля, что приводит к частотным смещениям, информация о которых используется для реконструкции неоднородностей. Решение обратной задачи проводится в два этапа. На первом этапе определяется связь между вариациями дисперсионной характеристики и обусловленными ими частотными смещениями волнового поля. На втором этапе устанавливается, с использованием априорной информации о характере неоднородности, связь между изменениями дисперсионной характеристики и параметрами возмущения.

В последнее время, в дополнение к существующему визуальному методу измерения частотных смещений, разработаны еще два принципиально новых метода с высокой помехоустойчивостью. Один из них основан на отслеживании максимума фокального пятна, формируемого обращением волнового фронта [17]; другой – корреляционный метод – на регистрации перемещения максимума взаимокорреляционной функции спектров сигналов, принимаемых в разные моменты времени [18].

Такой подход представляет широкие перспективы для мониторинга океанической среды, возможности которого до конца еще не исследованы. На данный момент наиболее полно разработаны физические основы мониторинга в условиях независимых нормальных волн, хотя и здесь имеются некоторые нерешенные вопросы. В частности, вопросы восстановления спектра поверхностного волнения, повышения чувствительности метода и применения частотных смещений для решения прямых задач распространения волн. Значительно больше неясного остается в вопросе об использовании мониторинга в условиях, когда нормальные волны нельзя считать независимыми.

Таким образом, вопросы формирования интерференционной картины и анализ динамики частотных смещений, обусловленных пространственно-временной изменчивостью водной среды, представляют собой актуальную задачу акустики океана, направленную на разработку новых подходов к решению прямых и обратных задач.

### **Задачи работы**

- анализ изменчивости пространственно-частотной интерференционной структуры звукового поля, обусловленной двумерным анизотропным возмущением океанической среды;
- изучение влияния поверхностного волнения на формирование интерференционной структуры звукового поля в океаническом волноводе;
- решение обратной задачи по определению параметров движущегося солитона внутренних волн на основе данных о частотных смещениях интерференционных максимумов звукового поля;
- разработка метода выделения компонент интерференционной структуры звукового поля в океаническом волноводе, соответствующих различным группам однотипных мод, основанного на различии в их дисперсионных характеристиках.

### **Научная новизна**

В работе получил дальнейшее развитие интерференционный акустический метод диагностики океанических неоднородностей, основанный на информации о частотных смещениях. В рамках этих исследований впервые:

- для произвольной геометрии расположения точек наблюдения в горизонтальной плоскости получены статистические характеристики пространственных частотных смещений, вызванных двумерным случайным анизотропным возмущением океанической среды;
- на основе информации о частотных смещениях проведена оценка флуктуаций фазы звукового поля, вызванных неоднородностями водной среды;
- установлена связь между временными спектрами частотных смещений и поверхностного волнения;
- аналитически решена и численно промоделирована задача о частотных смещениях в присутствии солитона внутренних волн в условиях взаимодействия мод, проанализированы возможности восстановления параметров солитона;
- предложен и апробирован алгоритм выделения составляющих интерференционной структуры звукового поля в океанических волноводах, и продемонстрировано его применение для повышения чувствительности мониторинга, основанного на информации о частотных смещениях.

### **Практическая значимость работы**

Полученные результаты могут быть использованы для:

- мониторинга крупномасштабных океанических неоднородностей в условиях независимых и связанных нормальных волн;

- оптимизации модовой структуры звукового поля для акустического зондирования океанической среды.

### **Методы исследования**

Для решения поставленных задач использовались как аналитический подход, так и численное моделирование, опирающиеся на модовое представление звукового поля в случайно-неоднородном океаническом мелководном звуковом канале. Многократное рассеяние звуковых волн учитывалось путем включения в модель взаимодействия мод, а поправки к собственным значениям задачи Штурма-Лиувилля, вызванные нерегулярностью волновода, определялись в рамках теории возмущений.

### **Защищаемые положения**

1. Взаимосвязь спектральных характеристик частотных смещений звукового поля с пространственным спектром анизотропных флуктуаций дисперсионной характеристики волновода при произвольном разнесении точек наблюдения в горизонтальной плоскости.
2. Развитое поверхностное волнение не приводит к разрушению локализованной интерференционной картины в низкочастотном диапазоне звукового поля.
3. Восстановление высокочастотного временного спектра неоднородностей возможно, если известна функция, связывающая между собой временные спектры неоднородности и частотных смещений звукового поля, которая определяется через угловое распределение возмущения. В случае ветрового волнения можно выделить угловой интервал ориентации трассы относительно направления максимума углового спектра, в котором удастся предложить эталонную функцию.
4. В условиях взаимодействия мод возможно решение обратной задачи по определению параметров движущегося солитона внутренних волн на основе информации о частотных смещениях звукового поля. Учет взаимодействия мод повышает эффективность мониторинга.
5. Предложенный и апробированный в численном эксперименте метод выделения интерференционной картины, формируемой разными группами однотипных мод, увеличивает чувствительность мониторинга, основанного на информации о частотных смещениях звукового поля.

### **Достоверность результатов**

Выводы работы подтверждаются численным моделированием, показавшим соответствие с аналитическими расчетами. Рядом ведущих специалистов у нас и за рубежом получены результаты, находящиеся в тесной связи с частью представленных автором материалов [7, 13, 14, 16, 17] .

### **Апробация результатов работы и публикации**

Результаты исследований докладывались на: XXIV сессии РАО (2012, Таганрог); XIV школе-семинаре им. акад. Л.М. Бреховских, совмещенной с XXVI сессией РАО (2013, Москва); 1-й Всероссийской акустической конференции, совмещенной с XXVIII сессией РАО (2014, Москва).

Материалы диссертации отражены в 11 печатных работах, 6 из которых опубликованы в рецензируемых журналах, включенных в перечень ВАК. Часть содержащихся в работе результатов получена при поддержке программы фундаментальных исследований Отделения физических наук РАН “Фундаментальные основы акустической диагностики искусственных и природных сред”. Работа выполнена в рамках плановых НИР кафедры математической физики при поддержке госзадания Минобрнауки РФ №1306 и ФЦП “Исследования и разработки” (соглашение № 14,577.21.0035). Выполненные исследования поддержаны Американским акустическим обществом.

### **Личный вклад автора**

Автор диссертации принимал непосредственное участие в постановке и решении конкретных задач, организации и выполнении теоретических исследований, компьютерного моделирования, получении основных результатов и их интерпретации. Все представленные в диссертации результаты получены автором самостоятельно или в соавторстве с В.М. Кузькиным (НЦВИ ИОФ РАН) и С.А. Пересёлковым (Воронежский госуниверситет).

### **Структура и объем работы**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, первая из которых представляет собой обзор литературы, заключения и списка цитируемой литературы. Работа содержит 94 страниц, 29 рисунков, 7 таблиц и библиографию из 78 наименований. В первом параграфе каждой главы дается введение в круг рассматриваемых вопросов, формулируется постановка задачи и приводится обзор полученных результатов. Каждая глава завершается сводкой основных результатов в форме кратких выводов.

### **Содержание работы**

**Во введении** обоснован выбор научного направления исследований, показана актуальность решаемых проблем, сформулированы задачи диссертационной работы, положения, выносимые на защиту, отмечена научная новизна и практическая ценность полученных результатов, а также приведено краткое содержание работы.



**В первой главе** диссертации дано краткое описание исследуемых в работе физических явлений и изложены используемые математические модели.

*В параграфе 1.2* представлено описание математической модели мелкого моря, используемой в диссертации для анализа звукового поля. Сформулированы основные соотношения модового подхода, применяемого в работе для расчета и описания звукового поля на низкой частоте в присутствии неоднородностей среды.

*В параграфе 1.3* дано описание динамических океанических неоднородностей среды, которые оказывают существенное влияние на распространение звука – интенсивных внутренних солитонов и поверхностных волн.

*Параграф 1.4* посвящен описанию общих свойств интерференционной структуры звукового поля и интерференционному инварианту как способу ее описания.

*В параграфе 1.5* представлен теоретический подход к описанию смещений интерференционной структуры звукового поля. Он основывается на том факте, что частотный сдвиг следует рассматривать как изменение частоты звукового поля, при котором выравниваются изменения фаз конструктивно интерферирующих мод. Вариации фаз связаны с изменением постоянных распространения из-за возмущения среды. Измеряя частотный сдвиг, можно определить изменения постоянных распространения, что в случае известной модели неоднородности может быть использовано для решения обратных задач.

Приведены выражения, связывающие временные и пространственные частотные смещения с дисперсионными характеристиками волновода. Рассмотрены прямой и корреляционный метод регистрации смещений интерференционных максимумов звукового поля. Описаны преимущества и недостатки этих методов.

*В параграфе 1.6* Проведен анализ результатов, полученных различными авторами в рамках задач мониторинга океанической среды. Проанализированы отличительные особенности и преимущества метода, основанного на измерениях частотных сдвигов интерференционных максимумов, по сравнению с традиционными методами мониторинга океанической среды.

**Вторая глава** посвящена анализу, в рамках приближения адиабатических мод, изменчивости пространственно-частотной интерференционной структуры звукового поля, обусловленной двумерным случайным анизотропным возмущением океанической среды.

*В параграфе 2.2* получены выражения для частотных смещений интерференционных максимумов, регистрируемых в произвольно разнесенных точках наблюдения, и соотношения, связывающие средний квадрат флуктуаций частотного сдвига с пространственным спектр

поля возмущений дисперсионных характеристик волновода. Также были рассмотрены два предельных случая расположения точек наблюдения: поперечный и продольный.

Показано, что для любой пары однотипных мод изменение разности фаз равно произведению частотного сдвига на весовой множитель. Таким образом, измерения частотного сдвига позволяют получать изменения разности фаз интерферирующих нормальных волн.

Для низкочастотной (длинноволновой) области возмущения и сравнительно коротких трасс, интенсивность флуктуаций частотного сдвига определяется дисперсией возмущения дисперсионной характеристики волновода и не зависит от ориентации положения точек наблюдения.

*В параграфе 2.3* проанализирована возможность решения прямой задачи распространения звукового поля в океаническом волноводе на основе частотных смещений. Были получены статистические характеристики интерференционного инварианта [10] и оценены смещения диаграммы направленности и размер поперечного радиуса когерентности.

**В третьей главе** представлены результаты исследования влияния поверхностного волнения на интерференционную структуру звукового поля в мелководном океаническом волноводе.

*В параграфе 3.2*, в рамках численного моделирования, получены статистические оценки для интерференционного инварианта и величины, характеризующей ошибку в определении угла наклона интерференционной полосы в широком диапазоне расстояний (10-100 км) и частот (150-370 Гц). При моделировании использовался спектр Пирсона-Неймана, скорость ветра предполагалась равной 9 м/с. Показано, что для зимней и летней гидрологий в рассмотренном диапазоне частот и расстояний интерференционная картина сохраняет свою структуру, однако в некоторых случаях ее контрастность ухудшается.

*В параграфе 3.3* получено и проанализировано общее аналитическое решение задачи о связи между временными спектрами частотных смещений интерференционного максимума и возмущения дисперсионной характеристики волновода.

*В параграфе 3.4* получена взаимосвязь между временным спектром частотных смещений и временным спектром отклонений поверхности от положения равновесия. Спектр частотных смещений воспроизводит с некоторыми искажениями спектр ветрового волнения, что демонстрирует принципиальную возможность диагностики поверхностного волнения с использованием частотных смещений.

**В четвертой главе** рассмотрена задача о частотных смещениях интерференционных максимумов звукового поля, вызванных движущимся одиночным солитоном внутренних волн.

Внутренний солитон вызывает значительное возмущение среды распространения. Многократное рассеяние на нем ведет к сильному взаимодействию мод, которые необходимо учитывать при анализе частотных смещений.

В параграфе 4.2 на основе данных численного моделирования проанализирована временная динамика частотных смещений, обусловленная солитоном, в случае многомодового режима распространения звукового поля для внутреннего солитона вида  $\zeta(r, t) = A \operatorname{sech}^2[(r - vt)/\eta]$ . Рассмотрение проводилось как для случая адиабатического приближения, так и с учетом сильного взаимодействия мод на солитоне.

В случае связанных мод частотные смещения имеют квазигармонический характер, что не наблюдается в случае адиабатического приближения. Показано, что среднее значение осцилляций отличается от адиабатического значения, причем это различие растет с увеличением амплитуды и размеров солитона. Уменьшение скорости неоднородности приводит к пропорциональному возрастанию периода колебаний частотных смещений, без изменения их амплитуду и среднее значение.

В параграфе 4.3 получено и проанализировано аналитическое решение задачи о частотных смещениях для модели звукового поля, соответствующей маломодовому режиму распространения, когда распространяются только две моды, между которыми происходит обмен энергией. Этот режим, по сравнению с многомодовым, физически более прозрачен, так как интерференционная картина не “замазывается” взаимодействием большого числа мод, и полученное решение, при определенных условиях, допускает обобщение на случай многомодового распространения.

В разделе 4.3.1, применительно к маломодовому режиму распространения, получено аналитическое решение задачи о частотных смещениях интерференционных максимумов. Представлены оценки для частот и полуширин максимумов на спектре временной динамики частотных смещений. Полученные соотношения позволяют, используя информацию о частотных смещениях, вызванных внутренним солитоном, определить его параметры: амплитуду, ширину и скорость.

В разделе 4.3.2 исследовано движение солитона под углом к акустической трассе. Пересечение солитоном трассы под углом сводилось к случаю движения вдоль трассы, если бы солитон имел соответствующие эффективные полуширину и скорость. Проанализировано количественное сопоставление результатов моделирования и теории для различных углов.

В разделе 4.3.3 показана возможность решения обратной задачи по определению параметров солитона в условиях связанных нормальных волн. В рамках численного эксперимента на основе зарегистрированных частотных смещений проведено восстановление

параметров движущегося солитона. Восстановленные параметры близки к исходным модельным, что свидетельствует о состоятельности аналитических оценок параметров солитона.

**В пятой главе** предложен метод выделения интерференционной картины, формируемой разными группами однотипных мод, который основан на различии в их дисперсионных характеристиках. Практический интерес к задаче связан с тем, что моды имеют разную чувствительность по отношению к неоднородностям среды различной природы.

*В параграфе 5.2* изложена идея метода выделения составляющих интерференционной картины и продемонстрирована его работоспособность применительно к двумерной (построенной в плоскости расстояние–частота) и одномерной (формируемой точечным источником в точке приема) интерференционным структурам звукового поля, формируемым в мелководном звуковом канале со стратификацией водного слоя, типичной для летнего периода.

Интерференционная структура звукового поля представляет собой сумму компонент, каждая из которых обуславливается интерференцией отдельных групп мод и представляет собой параллельно расположенные полосы в координатах расстояние–частота. Угол наклона этих полос и их ширина определяются пространственными и частотными периодами интерференции соответствующих групп мод. На спектре двумерной интерференционной структуры будут наблюдаться области локализации спектральной плотности, соответствующие различным компонентам интерференционной картины. Если эти области не перекрываются, то их можно выделить путем фильтрации, и двумерным обратным преобразованием Фурье восстановить составляющие интерференционной картины, соответствующие различным группам мод.

*В параграфе 5.3* проанализирована эффективность предложенного метода выделения компонент интерференционной структуры в задаче регистрации частотных смещений, вызванных солитоном внутренних волн, движущимся вдоль акустической трассы. Частотные смещения, наблюдаемые при распространении всех мод, на порядок меньше частотных смещений при маломодовом режиме распространения. Разделение компонент интерференционной структуры позволяет избежать трудности, связанной с взаимным их влиянием и, тем самым, повышает точность измерений частотных смещений, что актуально при решении обратной задачи.

**В заключении** приведены основные результаты работы.

## ГЛАВА 1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЗВУКА В МЕЛКОМ МОРЕ

## § 1.1. Краткое введение

Природные водоемы представляют собой довольно сложные объекты, которые описываются большим количеством параметров. Однако на распространение звука многие из них не оказывают прямого влияния (химический состав, цвет и т. д.). С точки зрения акустики, основными параметрами, влияющими на распространение звуковых колебаний, являются скорость звука и коэффициент затухания звукового поля. Скорость звука в воде зависит от температуры, давления и солености, и может быть вычислена по эмпирическим формулам [19]. Распространение звука в жидкой среде описывается уравнениями гидродинамики [20], вид которых, а также вид граничных условий, налагаемых на решение этих уравнений, зависит от среды распространения. По мере прохождения от источника к приемнику звуковое поле приобретает выраженную интерференционную структуру, которая чувствительна к параметрам среды распространения [10].

В параграфе 1.2 дано описание математической модели мелкого моря, используемой в диссертации для моделирования распространения звукового поля. Приведены основные соотношения модового подхода и теории возмущений [21], используемой для расчета влияния на звуковое поле неоднородностей среды распространения. В параграфе 1.3 описываются динамические неоднородности среды, которые присутствуют в природных волноводах и оказывают существенное влияние на распространение звука – внутренние и поверхностные волны. Параграф 1.4 посвящен описанию общих свойств интерференционной структуры звукового поля, а также интерференционному инварианту как способу ее описания. В параграфе 1.5 дается общее описание смещений интерференционной структуры звукового поля, обусловленных изменением характеристик волноводных каналов. Также в параграфе присутствует описание методов регистрации этих смещений: прямого и корреляционного. Описываются их преимущества и недостатки [22]. В параграфе 1.6 описываются основные методы мониторинга океанической среды: лучевой, модовый, интерференционный. Проанализированы их преимущества и недостатки.

## § 1.2. Модовое описание звукового поля

В работе рассматривается распространение звука в шельфовой зоне океана, достаточно удаленной от берега и бровки шельфа. Среда принимается неограниченной по горизонтальным

координатам, сверху ограниченной абсолютно мягкой свободной поверхностью, а снизу – поглощающим полупространством – дном, глубина волновода считается постоянной. В отсутствии возмущений волновод принимается горизонтально однородным.

Как известно [19, 23], процесс распространения звукового поля частотой  $f$  описывается уравнением Гельмгольца:

$$[\Delta + k^2 n^2(\vec{R})]p(\vec{R}) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\vec{R} = (\vec{r}, z)$  – трехмерный радиус-вектор,  $k = 2\pi f/c_0$  – волновое число,  $n(\vec{R}) = c_0/c(\vec{R})$  – акустический показатель преломления среды,  $c_0$  – среднее значение скорости звука,  $P(\vec{R}) = p(\vec{R})\exp(i2\pi ft)$  – звуковой потенциал.

Так как в работе рассматриваются явления, для которых эффектами горизонтальной рефракции можно пренебречь, то целесообразно перейти в цилиндрическую систему координат с помощью замены  $p = \psi/\sqrt{r}$ . Для области, расположенной на значительном расстоянии от источника, поле точечного источника с координатами  $(0, z_{\text{ист}})$  определяется уравнением

$$\Delta_{rz}\psi + k^2 n^2(z)\psi = \delta(0, z_{\text{ист}}), \quad (1.2)$$

которое следует из (1.1). Здесь  $\Delta_{rz} = \frac{\partial^2}{\partial^2 r} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$  – двумерный оператор Лапласа.

Также уравнение должно быть дополнено граничными условиями. Для случая невозмущенной абсолютно мягкой верхней поверхности граничное условие имеют вид:

$$\psi(r, 0) = 0, \quad (1.3)$$

Дно волновода, как правило, обладает сложной, многослойной структурой. Оно состоит из слоев неконсолидированных, частично консолидированных и консолидированных осадков [24]. Однако часто основной вклад в распространение звука вносит верхний слой, модуль сдвига в котором мал, и который можно считать жидким. При рассмотрении распространения звука на большие расстояния (10-50 км) свойства дна могут значительно меняться вдоль трассы [25, 26]. Это делает уместным использование модели однородного жидкого поглощающего дна, параметры которого (скорость звука  $c_d$ , плотность  $\rho_d$ , коэффициент затухания  $\alpha$ ) соответствуют неким средним вдоль трассы значениям. Соответствующие граничные условия можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \psi(r, H - 0) &= \psi_d(r, H + 0), \\ \frac{\partial \psi(r, H - 0)}{\partial z} &= \frac{\rho_v}{\rho_d} \frac{\partial \psi_d(r, H + 0)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

здесь  $\rho_v$  – плотность воды у дна.

Аналитическое решение уравнения Гельмгольца с соответствующими граничными условиями возможно только в простейших случаях. Так как реальная океаническая среда не является горизонтально однородной и характеризуется как детерминированными, так и случайными изменениями, это приводит к необходимости использования приближенных методов, наиболее распространенными из которых являются лучевой, модовый и метод параболического уравнения.

При выборе приближенных методов решающее значение оказывает глубина волновода и масштаб неоднородностей. Как показано в [24], критерием мелкого моря, с точки зрения акустики, может служить соотношение:

$$r \gg \frac{H^2}{\lambda}. \quad (1.5)$$

В этом случае число энергонесущих лучей превосходит число энергонесущих мод. При  $r = 10000\text{м}$ ,  $H = 100$ ,  $\lambda = 5\text{м}$  это условие выполняется.

Для описания и моделирования звукового поля, в работе используется модовый подход, в основе которого лежит метод разделения переменных. При его использовании решение уравнения ищется в виде суперпозиции мод волновода:

$$\psi(r, z) = \sum_n \frac{C_n(r)}{\sqrt{h_n}} \varphi_n(r, z) \exp\left(i \int_0^r \xi_n(r') r' dr'\right), \quad (1.6)$$

где  $\varphi_n(r, z)$  – моды звукового поля, являющиеся нормированными решениями поперечного уравнения с граничными условиями, которые следуют из (1.2) – (1.4):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_n(r, z)}{dz^2} + [k^2 n^2(r, z) - \xi_n^2(r)] \varphi_n(r, z) &= 0, \\ \varphi_n(\vec{r}, 0) &= 0, \quad \varphi_n(\vec{r}, H) + g(\xi_n) \frac{\partial \varphi_n(\vec{r}, H)}{\partial z} = 0, \\ g(\xi_n) &= \frac{\rho_b}{\rho_d \sqrt{\xi_n^2 - k^2 \left(\frac{c_0}{c_d}\right)^2 (1 + i\alpha)}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $\xi_n = h_n + i \gamma_n/2$ ,  $h_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$  – собственные числа задачи Штурма-Лиувилля – горизонтальные волновые числа мод мелководного ПЗК. Величины  $h_n$  являются постоянными распространения мод, а  $\gamma_n$  – характеризует донное поглощение моды.

Вне регулярного волновода модальные амплитуды  $C_m(r)$  находятся из системы дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями [24, 21]:

$$\frac{dC_m(r)}{dr} = i \sum_l \mu_{ml}(r) C_l(r) \exp[i \int_0^r (\xi_m - \xi_l) dr']$$

$$C_m(0) = \varphi_m(0, z_{\text{ист}})$$
(1.8)

Коэффициенты взаимодействия мод  $\mu_{ml}$  в случае неоднородности в водном слое находятся по формуле [24, 21]:

$$\mu_{ml}(r) = \frac{k^2}{2\sqrt{h_m h_l}} \int_0^H \varphi_m(r, z) \mu(r, z) \varphi_l(r, z) dz$$
(1.9)

Величина  $\mu = -2\delta c(r, z)/c_0(z)$  определяется возмущением стратификации водного слоя  $\delta c(r, z)$ .

В случае нерегулярной свободной поверхности граничное условие на невозмущенной верхней поверхности (1.3) нужно заменить на

$$\psi(r, 0) + \frac{\partial \psi(r, 0)}{\partial z} s(r) = 0.$$
(1.10)

Коэффициенты взаимодействия в этом случае имеют вид:

$$\mu_{ml}(r) = \frac{s(r)}{2\sqrt{h_m h_l}} \frac{\partial \varphi_m(r, 0)}{\partial z} \frac{\partial \varphi_l(r, 0)}{\partial z},$$
(1.11)

где  $s(r)$  — отклонение поверхности от положения равновесия.

В адиабатическом приближении взаимодействием мод пренебрегают, то есть считают  $\mu_{ml}(r) \equiv 0$  при  $m \neq l$ .

### § 1.3. Океанические неоднородности

Океаническая среда, в частности мелкое море, характеризуется значительной изменчивостью. Явления, приводящие к ней, можно разделить на две группы: регулярные и случайные. К регулярным явлениям можно отнести приливные волны, крупномасштабные морские течения, интенсивные внутренние волны и др. Случайные изменения вызваны фоновыми внутренними волнами, турбулентностью, тонкоструйными образованиями, поверхностными волнами. В рамках данной работы используется модель, в которой предполагается наличие в ПЗК детерминированных и случайных неоднородностей в водной толще (интенсивные внутренние волны, фоновые внутренние волны), а также нерегулярной верхней границы, обусловленной поверхностными волнами.

**Внутренние волны.** В водоемах с выраженной термоклинной стратификацией водных слоев по глубине, при выведении их из состояния равновесия, возникают волновые движения под действием архимедовых сил и силы тяжести. Нарушение равновесия может быть вызвано



приливами, колебаниями атмосферного давления, ветра, подводными землетрясениями, обтеканием течения неровностей дна, антропогенными воздействиями и т.п. [27]. Таким образом, внутренние волны (ВВ) представляют собой смещения слоев жидкости (поверхностей постоянной плотности) относительно положения равновесия.

Для описания внутренних волн в глубокой части океана наиболее часто используется модель Гарретта–Манка. Однако в мелководной океанической среде ситуация значительно отличается от глубоководной. В ней колебания слоев жидкости происходят синфазно по всей глубине [27], то есть основная энергия колебаний сосредоточена в первой гравитационной моде. Внутренние волны условно можно разделить на фоновые и интенсивные. Фоновые внутренние волны имеют амплитуду порядка нескольких метров, присутствуют на шельфе длительное время и покрывают все пространство волновода. В отличие от них, интенсивные волны на шельфе обладают значительной амплитудой (10-20м) и локализованы в пространстве и времени. Частным случаем интенсивных внутренних волн являются солитоны. Это уединенные волны (или цуги) амплитудой 10-20 м, шириной несколько сотен метров и скоростью от 0,5 до 1,0 м/с.

Влияние ВВ на распространение звуковых волн связано с возмущениями поля скорости звука в среде, вызванными вертикальными колебаниями слоев воды. Стратификация волновода, возмущенного ВВ, имеет вид [28]:

$$n^2(r, z) = n_0^2(z) + \mu(r, z), \quad (1.12)$$

где  $\mu(r, z)$  – возмущение квадрата показателя преломления  $n^2(r, z)$ , обусловленное перемещением водных масс

$$\mu(r, z) = -2 \frac{\delta c(r, z)}{c_0(z)} = 2QN^2(z)\bar{\Phi}(z)\zeta(r). \quad (1.13)$$

Здесь  $Q = 2.4 \text{ с}^2/\text{м}$  – константа, определяемая физическими свойствами воды;  $N(z)$  – частота плавучести (частота Брента–Вяйсяля);  $\bar{\Phi}(z)$  – собственная функция первой гравитационной моды, нормированная на свое значение на глубине приема,  $\zeta(r)$  – вертикальные смещения водных слоев.

Для моделирования фоновых внутренних волн величина  $\zeta(r)$  рассматривается как случайная функция с заданными спектральными характеристиками, которые берутся из эксперимента.

Вертикальные смещения водных слоев  $\zeta(r)$ , обусловленные солитоном, движущимся перпендикулярно акустической трассе, определяются решением уравнения Кортевега – де Вриза и имеют вид [27]:

$$\zeta(r) = A \operatorname{sech}^2 \left( \frac{r - r_{\text{сол}}}{\eta} \right) \quad (1.14)$$

где  $A$  и  $\eta$  – амплитуда и полуширина солитона на уровне 0.42 от максимума,  $r_{\text{сол}}$  – положение солитона.

**Ветровое поверхностное волнение.** Поверхность океана находится в постоянном движении, которое вызвано влиянием ветра [29]. Основной экспериментально определяемой характеристикой является смещение точек поверхности от положения равновесия  $s(r)$ ,  $\langle s(r) \rangle = 0$ .

Для полностью развитого волнения, по данным измерений был построен спектр Пирсона-Неймана [30]:

$$S_{\text{пв}}(\omega) = a \omega^{-6} \exp \left( -2 \left( \frac{g}{\omega u} \right)^2 \right) \quad (1.15)$$

где  $u$  – скорость ветра (м/с),  $a = 8.1 \times 10^{-3}$ ,  $b = 0.74$ ,  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$  – константы спектра. Пользуясь дисперсионным соотношением  $\omega^2 = gk$  [20] можно получить пространственный спектр вертикальных смещений [19]:

$$S_{\text{пв}}(k, \theta) = \frac{a}{2g^{5/2}k^{7/2}} \exp \left( -\frac{2g}{ku^2} \right) K(k, \theta)$$

Функция  $K(k, \theta)$  характеризует угловое распределение энергии поверхностных волн и в данной работе принимается равной [19]:

$$K(k, \theta) = \begin{cases} 2/\pi \cos^2 \theta, & |\theta| \leq \pi/2 \\ 0, & |\theta| > \pi/2 \end{cases} \quad (1.16)$$

#### § 1.4. Интерференционная структура звукового поля

При распространении в океаническом волноводе звуковое поле приобретает выраженную интерференционную структуру, которая возникает из-за наложения волн, испытавших различное количество отражений от границ волновода при прохождении акустической трассы [10, 31, 32]. Эта структура устойчива к значительным возмущениям волновода. Структура интерференционной картины определяется разностью постоянных распространения интерферирующих мод.

Для описания интерференционной структуры широко применяется такая характеристика, как интерференционный инвариант (ИИ). При изменении горизонтального расстояния  $r$  между источником и приемником (или какого-либо параметра  $\gamma$  волновода) ИИ определяется как [10, 33, 34]

$$\beta_0 = \frac{\Delta\omega/\omega_0}{\Delta r/r_0} \text{ или } \eta_0 = \frac{\Delta\omega/\omega_0}{\Delta\gamma/\gamma_0}, \quad (1.17)$$

где  $(\omega_0, r_0)$  и  $(\omega_0, \gamma_0)$  – расположения локальных максимумов поля;  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ ,  $\Delta r = r - r_0$ ,  $\Delta\gamma = \gamma - \gamma_0$  – приращения, соответственно, частоты, расстояния и параметра волновода, отвечающие сдвигу отслеживаемого максимума на плоскости  $\omega - r$  или  $\omega - \gamma$ .

Условия распространения в волноводе таковы, что поле эффективно формируется небольшим числом конструктивно интерферирующих мод с близкими номерами. Это позволяет величине  $\beta_0$  (1.17) придать следующий физический смысл [10, 35]

$$\beta_0 = \beta_l = - \left[ \frac{c_{gl}(\omega_0)}{c_{pl}(\omega_0)} \right]^2 \frac{dc_{pl}(\omega_0)}{dc_{gl}(\omega_0)}, \quad (1.18)$$

где  $c_{pl} = \omega/h_l$  и  $c_{gl} = d\omega/dh_l$  – фазовая и групповая скорости опорной  $l$ -моды, в окрестности которой моды синфазны,  $h_l$  – действительная часть постоянной распространения моды номера  $l$ . Оценка числа  $\Delta l$  синфазных мод приведена в [36]. Алгоритм (1.18) позволяет, полагая ИИ известным, определить номер  $l$ , использующийся при описании частотных смещений.

Величина  $\beta_0$  может быть определена также в рамках интегрального подхода [37]. В окне  $r_0 - \Delta r \leq r \leq r_0 + \Delta r$ ,  $\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega$  анализируется интерференционная картина  $u(r, \omega) = |p(r, \omega)| - |\overline{p(r, \omega)}|$ , где  $|\overline{p(r, \omega)}|$  – амплитуда поля  $p(r, \omega)$ , сглаженного по пространственным и частотным интерференционным биениям. Вне пределов окна считается  $u(r, \omega) = 0$ . Вычисляется пространственный спектр  $\tilde{u}(\kappa, \tau)$  величины  $u(r, \omega)$ . Далее анализируется распределение спектральной интенсивности  $\Phi(\beta)$  в зависимости от параметра  $\beta = (r_0/\omega_0)\text{tg}\vartheta$

$$\Phi(\beta) = \int_0^\infty |\tilde{u}(\tau, \kappa)|^2 \rho d\rho, \quad (1.19)$$

где  $\tau = r\cos\vartheta$ ,  $\kappa = r\sin\vartheta$  – полярные координаты. Максимум  $\Phi(\beta)$  приходится на значение  $\vartheta = \vartheta_0$ , отвечающее ИИ  $\beta_0$ . Ширина  $\Delta\beta$  функции (1.19) определяет ошибку в индикации положения максимума функции, т.е. размытость интерференционной локализованной полосы. Значение  $\Delta\beta$  увеличивается по мере уменьшения числа  $\Delta l$  интерферирующих мод. На уровне 0.5 от максимума ее ширина равна

$$\Delta\beta = \sqrt{\frac{\Phi(\beta_0)}{d^2\Phi(\beta_0)/d\beta^2}}. \quad (1.20)$$

До тех пор, пока расплывание функции (1.19) невелико, интерференционная картина, сохраняя устойчивость, с изменением расстояния  $r$  смещается по частоте  $\omega$ . По мере уменьшения максимального значения  $\Phi(\beta_0)$  возрастает ширина  $\Delta\beta$ , что приводит к уменьшению частотно-пространственной области интерференционной картины, в пределах которой сохраняются линии равной фазы. В предельном случае, когда  $\Phi(\beta_0) \rightarrow 1$ , ширина  $\Delta\beta \rightarrow \infty$ , т.е. линии максимумов стягиваются в точку, а интерференционная картина становится неустойчивой и разрушается. Ширину  $\Delta\beta$  можно рассматривать как меру устойчивости интерференционной картины в зависимости от изменения условий распространения.

### § 1.5. Частотные смещения интерференционных максимумов

На основе понятия ИИ можно решать лишь ограниченный круг задач, использующих информацию о частотных смещениях, так как выражения (1.17) – (1.19) не позволяют в явном виде их связать с изменениями постоянных распространения разных мод, зависящих от частоты. Это затрудняет использование ИИ для решения многих обратных задач.

Теория частотных смещений основывается на уравнении, выражающем тот простой факт, что частотный сдвиг следует рассматривать как изменение частоты, при котором выравниваются изменения фаз конструктивно интерферирующих мод, вызванных изменением состояния среды, что позволяет оставаться на выбранном локальном максимуме волнового поля [35, 38, 39]. При этом величина максимума и вид интерференционной картины могут изменяться, так как меняются амплитуды мод и дисперсионная характеристика океанической среды. Пусть точки приема  $Q_1(\mathbf{r}_1, z_1)$  и  $Q_2(\mathbf{r}_2, z_2)$  удалены от источника на горизонтальные расстояния  $r_1$  и  $r_2$  в направлении единичных векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  и расположены на глубинах  $z_1$  и  $z_2$ , соответственно,  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_1/r_1$ ,  $\mathbf{n}_2 = \mathbf{r}_2/r_2$ . Далее положим, что в момент времени  $t_1$  положение локального максимума интенсивности в точке  $Q_1$  приходится на значение частоты  $\Omega_1$ , а в точке  $Q_2$  под действием возмущения и за счет изменения расстояния от  $\mathbf{r}_1$  до  $\mathbf{r}_2$  смещается на величину  $\Delta\Omega$ . Значение  $\Omega_2 = \Omega_1 + \Delta\Omega$  в момент  $t_2 = t_1 + \Delta t$  должно удовлетворять условию сохранения фазы для конструктивно интерферирующих мод произвольных номеров  $m$  и  $n$

$$\int_0^{r_2} h_{mn}(\Omega_2, t_2, \mathbf{n}_2 r) dr = \int_0^{r_1} h_{mn}(\Omega_1, t_1, \mathbf{n}_1 r) dr, \quad (1.21)$$

где  $h_{mn} = h_m - h_n$ . Частотный сдвиг определяется перемещением вдоль фазовой линии. Возмущение среды приводит к изменениям дисперсионной характеристики среды, что можно

интерпретировать как изменение разности хода интерферирующих мод от источника до точки наблюдения. Решение уравнения (1.21) для определения частотного сдвига  $\Delta\Omega$  известно лишь для случая невзаимодействующих нормальных волн, когда можно ограничиться адиабатическим приближением описания поля [35, 38, 40], что предполагает инвариантность решения по отношению к произвольной комбинации независимых мод.

В основе метода решения лежит предположение о том, что в точках наблюдения конструктивно интерферирует совокупность мод с близкими номерами в окрестности  $l$ -го номера опорной моды. Это позволяет, считая номер моды изменяющимся непрерывно, действительную часть постоянной распространения  $h_m$  разложить в ряд в этой окрестности, ограничившись линейным приближением

$$h_m(\omega, t, \mathbf{r}) = h_l(\omega, t, \mathbf{r}) + \alpha(\omega, t, \mathbf{r})(m - l) \quad (1.22)$$

где

$$\alpha(\omega, t, \mathbf{r}) = \partial h_l(\omega, t, \mathbf{r}) / \partial l = h_{l+1}(\omega, t, \mathbf{r}) - h_l(\omega, t, \mathbf{r}). \quad (1.23)$$

При этом полагается, что величина  $\alpha(\omega, t, \mathbf{r})$  (1.23) мало отличается от своего невозмущенного значения  $\bar{\alpha}(\omega)$

$$\alpha(\omega, t, \mathbf{r}) = \bar{\alpha}(\omega) + \tilde{\alpha}(\omega, t, \mathbf{r}) \quad (1.24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(\omega) &= \partial \bar{h}_l / \partial l = \bar{h}_{l+1}(\omega) - \bar{h}_l(\omega), \\ \tilde{\alpha}(\omega, t, \mathbf{r}) &= \partial \tilde{h}_l / \partial l = \tilde{h}_{l+1}(\omega, t, \mathbf{r}) - \tilde{h}_l(\omega, t, \mathbf{r}), \\ |\tilde{\alpha}| &\ll |\bar{\alpha}|, |\tilde{h}_l| \ll |\bar{h}_l|. \end{aligned}$$

Случайное поле возмущения полагается статистически однородным и стационарным. Поправку  $\tilde{\alpha}$  к невозмущенному значению  $\bar{\alpha}$ , которое считается известным из решения уравнения Гельмгольца с соответствующими граничными условиями [19], можно вычислить по теории возмущений [21], связав, таким образом, изменения дисперсионной характеристики с параметрами неоднородности.

Разложим фазу в левой части (1.21) в окрестности точки  $(\Omega_1, t_1)$ , ограничиваясь линейными членами, и воспользуемся представлением (1.22) – (1.24). В результате получаем выражение для частотного сдвига  $\Delta\Omega$ . В качестве примера рассмотрим частотные смещения временной и пространственной структуры звукового поля.

## 1.5.1. Временные частотные смещения

Точки наблюдения  $Q_1, Q_2$  совмещены и расположены в точке  $Q$ , которая удалена от источника на расстояние  $r$  в направлении единичного вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r_x, r_y)$  – радиус-вектор в горизонтальной плоскости  $(x, y)$ . Используя разложения (1.22) – (1.24), частотный сдвиг в соответствии с (1.21) можно выразить как [41]

$$\Delta\Omega = -\Delta t \frac{\int_0^r \frac{\partial \tilde{\alpha}(\Omega_1, t_1, \mathbf{n}\mathbf{r})}{\partial t} dr}{\int_0^r \frac{d\tilde{\alpha}(\Omega_1)}{d\omega} dr}. \quad (1.25)$$

Далее, для простоты предположим, что невозмущенный волновод является горизонтально однородным и регулярные неоднородности отсутствуют. Рассмотрим отвечающую этому случаю связь спектра частотных смещений  $\Omega(t, \mathbf{r})$  со спектром флуктуаций дисперсионной характеристики  $\tilde{\alpha}(t, \mathbf{r})$ , вызванных случайным анизотропным полем неоднородности. Обозначим через  $b_\Omega(\nu, \mathbf{r})$  временной (частотный) спектр частотных смещений  $\Omega(t, \mathbf{r})$ . Перейдем к полярным координатам и будем считать, что пространственно-временной спектр  $F_\alpha(\nu, k, \theta)$  дисперсионной характеристики факторизуется,

$$F_\alpha(\nu, k, \theta) = E_\alpha(\nu, k)W_\alpha(\theta),$$

т.е. на каждой частоте волнового спектра  $E_\alpha(\nu, k)$  одинаковое распределение  $W_\alpha(\theta)$  интенсивности возмущения по углу,  $k$  – волновое число. Угловой спектр  $W_\alpha(\theta) = \int_0^\infty F_\alpha(\nu, k, \theta) k d\nu dk$  удовлетворяет условию нормировки  $\int_{-\pi}^\pi W_\alpha(\theta) d\theta = 1$ .

Связь между рассматриваемыми спектрами дается зависимостью [41]

$$b_\Omega(\nu, \mathbf{r}) = (gr)^2 \int_0^\infty E_\alpha(\nu, k) T(\eta) k dk, \quad (1.26)$$

где

$$T(\eta) = \int_{-\pi}^\pi W_\alpha(\theta) \frac{\sin^2(\eta \cos \theta)}{(\eta \cos \theta)^2} d\theta, \quad (1.27)$$

$g = \{r[\partial \tilde{\alpha}(\Omega_0)/\partial \omega]\}^{-1}$ ,  $\Omega_0$  – значение положения локального максимума в отсутствие возмущения;  $\eta = kr/2$ . Функция передачи пространственного фильтра  $T(\eta)$  (1.27),  $0 \leq T(\eta) \leq 1$ , сужает пространственный спектр возмущения и, тем самым, увеличивает корреляцию частотных смещений максимумов поля по сравнению с флуктуациями возмущения. Характер фильтрации зависит от углового спектра возмущения, длины и расположения трассы  $\mathbf{r}$ . Условие  $\eta < 1$  ограничивает частотный диапазон и длину трассы, когда временной спектр частотных смещений  $b_\Omega(\nu, \mathbf{r})$  (1.26) с точностью до множителя  $g$  воспроизводит временной спектр возмущения дисперсионной характеристики  $b_\alpha(\nu)$

независимо от расположения трассы по отношению к направлению распространения возмущения. Это объясняется тем, что в области низких частот дифракция слабо зависит от ориентации неоднородностей анизотропной среды по отношению к направлению распространения звуковой волны. Однако с увеличением частоты и расстояния, проходимого волной в такой среде, дифракционные эффекты возрастают и накапливаются, что делает их зависимыми от длины и направления трассы относительно расположения неоднородностей. Длину  $r_*$ , ограничивающую восстановление спектра  $b_\alpha(v)$  по измерениям спектра  $b_\alpha(v, \mathbf{r})$ , можно оценить из условия  $\eta = 1$ , что дает  $r_* = \lambda/\pi$ , где  $\lambda$  – длина волны возмущения. При известном дисперсионном соотношении  $k(v)$  определяется значение частоты  $v_*$ , отвечающее длине  $r_*$ . В частности, при сильной анизотропии,  $W_\alpha(\theta) = \delta(\theta - \theta_0)$ , и расположении трассы вдоль волнового фронта возмущения ( $\theta_0 = \pi/2$ ) функция  $T(\eta) = 1$  и ход спектра  $b_\Omega(v, \mathbf{r})$  всецело определяется самим возмущением:  $b_\Omega(v, \mathbf{r}) = gb_\alpha(v)$ . Если возмущение дисперсионной характеристики волновода представляет собой дискретный спектр, пространственные гармоники  $k_x = k\cos\theta$  которого кратны обратной длине трассы  $r$ , т.е.  $k_x = 2\pi n/r$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то частотные смещения равны нулю.

### 1.5.2. Пространственные частотные смещения

Пусть точки наблюдения  $Q_1(\mathbf{r}_1, z_0)$  и  $Q_2(\mathbf{r}_2, z_0)$  расположены в горизонтальной плоскости  $z_0 = \text{const}$ . Тогда частотный сдвиг  $\Delta\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  между ними можно представить в виде [39]

$$\Delta\Omega(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \Omega(\mathbf{r}_2) - \Omega(\mathbf{r}_1) = -\frac{\int_0^{r_2} \alpha(\mathbf{n}_2 r'') dr'' - \int_0^{r_1} \alpha(\mathbf{n}_1 r') dr'}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\bar{\alpha}(\Omega_1)}{d\omega} dr}, \quad (1.28)$$

В общем случае частотный сдвиг (1.28) содержит как регулярную составляющую  $\Delta\bar{\Omega}$ , обусловленную изменением расстояния между источником и точками приема [10, 33, 34], так и случайную компоненту  $\Delta\tilde{\Omega}$ , вызванную возмущением среды,  $\Delta\Omega = \Delta\bar{\Omega} + \Delta\tilde{\Omega}$ . Частотные сдвиги при различных схемах разнесения точек наблюдения проанализированы в [39]. В качестве примера рассмотрим круговое разнесение точек наблюдения  $Q_i(\mathbf{r}_0, z_0)$ , расположенных на невозмущенном фазовом фронте,  $\bar{\alpha}_l r_0 = \text{const}$ , окружности радиуса  $r_0$ , когда  $\Delta\bar{\Omega} = 0$ .

Примем, что в отсутствие возмущения положение максимума в точках приема приходится на значение  $\Omega_0$ . Обозначим через  $F_\Omega(\mathbf{k})$  и  $F_\alpha(\mathbf{k})$  двумерные пространственные спектры анизотропных случайных полей  $\tilde{\Omega}(\mathbf{r}_0) = \Omega(\mathbf{r}_0) - \Omega_0$  и  $\tilde{\alpha}(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r}) - \bar{\alpha}$ , вызванных возмущением среды. Если радиус окружности  $r_0$  много больше радиуса корреляции  $\rho_\alpha$

возмущения дисперсионной характеристики  $\tilde{\alpha}_l(\mathbf{r})$ ,  $r_0 \gg \rho_\alpha$ , то связь между спектрами дается выражением [39]

$$F_\Omega(\mathbf{\kappa}) = \frac{F_\alpha(\mathbf{\kappa})}{\pi[d\tilde{\alpha}(\Omega_0)/d\omega]^2}. \quad (1.29)$$

В случае изотропной дисперсии,  $\tilde{\alpha}(\mathbf{r}) = \tilde{\alpha}(r)$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , когда  $F_\alpha(\mathbf{\kappa}) = F_\alpha(\kappa)$ ,  $\kappa = |\mathbf{\kappa}|$ , соотношение (1.29) принимает вид

$$F_\Omega(\kappa) = \frac{F_\alpha(\kappa)}{[d\tilde{\alpha}(\Omega_0)/d\omega]^2}. \quad (1.30)$$

Таким образом, на больших расстояниях при круговом разнесении точек приема двумерный пространственный спектр частотных смещений с точностью до постоянного множителя воспроизводит спектр флуктуаций дисперсионной характеристики волновода. Примерами двумерных пространственных спектров являются, например, спектры внутренних волн и поверхностного волнения.

### 1.5.3. Методы измерений частотных смещений

К настоящему времени для измерения частотных смещений применяются три метода [42]. В первом из них, традиционном, восходящем к измерению ИИ [10, 33, 34] в заданной полосе частот отслеживаются частотные смещения выбранного локального максимума интерференционной картины. Присутствие большого числа максимумов, амплитуда которых изменяется под влиянием изменений условий распространения сигнала, делает возможности наблюдения за поведением выбранного максимума весьма ограниченными в натурном эксперименте и принципиально невозможными в случаях, когда нестационарность среды обусловлена случайными неоднородностями. К тому же метод, по сравнению с двумя другими, обладает низкой помехоустойчивостью [42, 43]. В экспериментах этот метод используется при наблюдении за приливными колебаниями [14, 15] и пространственными смещениями интерференционной картины, вызванными изменением расстояния между источником и приемником [10, 34, 44], а также при моделировании для демонстрации реконструкции океанических неоднородностей [45-48]. Существенно, однако, что теория частотных смещений [35, 38, 40] разработана применительно к данному методу измерений.

В основе второго метода измерения частотных сдвигов лежит фокусировка волн с использованием обращением волнового фронта. Он обладает большей помехоустойчивостью, однако требует использования протяженных антенн.

Таким образом, эти два прямых метода, основанные на измерениях положения максимума волнового поля, нельзя признать универсальными в натурных экспериментах для решения



обратной задачи. С экспериментальной точки зрения, существенным достижением является разработка нового корреляционного метода измерения частотных смещений [18, 42]. Этот метод, основанный на отслеживании перемещения максимума взаимокорреляционной функции спектров сигналов, принимаемых в разные моменты времени (в разных пространственно разнесенных точках приема), позволяет проводить измерения с использованием узкополосных источников и приемников без применения протяженных антенн. Результаты моделирования [42, 48] и теоретического рассмотрения [49, 18] показывают, что помехоустойчивость корреляционного метода сопоставима с методом, основанного на ОВФ. В то же время частотные смещения, измеряемые первым и корреляционным методами, близки между собой. Следовательно, корреляционный метод, обладая высокой помехоустойчивостью, позволяет избежать трудностей, связанных с применением протяженных широкополосных антенн, а измеряемые им частотные сдвиги укладываются в теоретические модели [35, 38, 40]. Техника корреляционного способа измерений частотных смещений впервые была применена в эксперименте по восстановлению баротропных и бароклиных приливных колебаний [13].

Рассмотрим более подробно корреляционный метод измерения частотных смещений. Пусть на входе приемного устройства в момент времени  $t$  задана реализация

$$\xi(\omega, t) = s(\omega, t) + n(\omega, t) \quad (1.31)$$

где  $s(\omega, t)$  – спектр сигнала;  $n(\omega, t)$  – спектральная амплитуда стационарного белого шума,  $\langle n(\omega, t)n^*(\omega', t) \rangle = N\delta(\omega - \omega', t)$ ,  $N$  – спектральная плотность,  $\delta(\omega)$  – дельта-функция. Звездочкой обозначено комплексное сопряжение, а угловые скобки означают статистическое усреднение по ансамблю случайных реализаций. Из-за возмущения океанической среды принимаемый спектр в момент  $t + \tau$

$$\xi(\omega, t + \tau) = s(\omega, t + \tau) + n(\omega, t + \tau) \quad (1.32)$$

будет смещен по частоте на величину  $\nu_0$  по отношению к спектру  $\xi(\omega, t)$  в момент времени  $t$ . Для определения значения  $\nu_0$  предложен метод, заключающийся в индикации положения максимума взаимокорреляционной функции принимаемых спектров (1.31), (1.32)

$$J(\nu, t, \tau) = \int \xi(\omega, t)\xi^*(\omega + \nu, t + \tau)d\omega, \quad J(\nu_0, t, \tau) = \max J(\nu, t, \tau), \quad (1.33)$$

который реализует получение наибольшего отношения крутизны спектра сигнала к среднеквадратичному значению шума. В общем случае имеется неоднозначность в определении положения максимума функции (1.33), т.е. наличествует несколько основных

пиков. Для его однозначной индикации интервал наблюдения  $\tau$  не должен превышать некоторого характерного значения  $\tau_*$ ,  $\tau < \tau_*$  [18].

В отсутствие шума однозначное положение максимума  $v_0$  взаимокорреляционной функции (4.3) дается значением

$$v_s = - \frac{\int s(\omega, t) \frac{\partial s^*(\omega, t+\tau)}{\partial \omega} d\omega}{\int s(\omega, t) \frac{\partial^2 s^*(\omega, t+\tau)}{\partial \omega^2} d\omega}, \quad (1.34)$$

которое при малых  $\tau$ ,

$$\tau \ll \frac{\int s(\omega, t) \frac{\partial^2 s^*(\omega, t)}{\partial \omega^2} d\omega}{\int s(\omega, t) \frac{\partial^3 s^*(\omega, t)}{\partial \omega^2 \partial t} d\omega}, \quad (1.35)$$

равно

$$v_s = -\tau \frac{\int s(\omega, t) \frac{\partial^2 s^*(\omega, t)}{\partial \omega \partial t} d\omega}{\int s(\omega, t) \frac{\partial^2 s^*(\omega, t)}{\partial \omega^2} d\omega}, \quad (1.36)$$

так что частотный сдвиг  $v_s$  пропорционален времени наблюдения  $\tau$ . При  $\tau \rightarrow 0$  взаимокорреляционная функция (1.33) переходит в автокорреляционную функцию, максимум которой достигается при значении  $v_s = 0$ .

Для реализации корреляционного метода измерений частотных смещений ширина спектра излучаемого сигнала  $s(\omega)$  должна превышать наименьший частотный масштаб  $\Delta\omega$  изменчивости интерференционной картины, формируемой крайними модами. В этом случае ширина  $\Delta\nu$  основного максимума взаимокорреляционной и автокорреляционной функций примерно равны и оценивается как  $\Delta\nu \sim \Delta\omega$  [42]. Условие однозначности в определении частотного сдвига можно также записать в виде неравенства  $v_s < \Delta\nu/2$ .

Положим теперь, что время наблюдения  $\tau$ , за которое измеряется частотный сдвиг  $v_s$ , больше  $\tau_*$ ,  $\tau > \tau_*$ . В этом случае промежуток времени  $(t, t + \tau)$  нужно разбить на число  $n$  последовательных интервалов  $\Delta\tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$  ( $\tau_0 = t, \tau_n = \tau$ ), удовлетворяющих условию  $\Delta\tau_i < \tau_*$ . Тогда значение результирующего частотного сдвига  $v_s(\tau)$  можно представить как сумму частотных сдвигов  $\Delta_i v_s = v_s(\Delta\tau_i)$  на этих последовательных интервалах

$$v_s(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i v_s.$$

При наличии шума дисперсия погрешности частотного сдвига будет

$$\sigma_v^2(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^2(\Delta\tau_i),$$

где  $\sigma^2(\Delta\tau_i)$  – дисперсия погрешности за время  $\Delta\tau_i$ . Таким образом, с увеличением времени наблюдения  $\tau$ , когда  $\tau > \tau_*$ , погрешность определения частотного сдвига возрастает.

С точки зрения общих принципов, при использовании частотных смещений интерференционных максимумов (ЧСИМ) для решения обратной задачи важно, что частотные смещения, регистрируемые первым прямым методом и корреляционным способом, близки между собой, отличие между их значениями уменьшается с сужением ширины спектра сигнала [18]. Это свойство, используя выражения (1.25) и (1.36), позволяет связать изменчивость дисперсионной характеристики с вариациями спектра принимаемого сигнала

$$\int_0^r \frac{\partial \tilde{\alpha}(\omega, t, \mathbf{nr})}{\partial t} dr = \int_0^r \frac{\partial \bar{\alpha}(\omega)}{\partial \omega} dr \frac{\int s(\omega, t) \frac{\partial^2 s(\omega, t)}{\partial \omega \partial t} d\omega}{\int s(\omega, t) \frac{\partial^2 s^*(\omega, t)}{\partial \omega^2} d\omega},$$

так что измерения спектра сигнала позволяют восстановить изменения в фазовых скоростях двух нормальных волн.

## § 1.6. Мониторинг океанической среды

Так как в морской воде на большие расстояния распространяется только звуковое поле, это делает его наиболее эффективным инструментом для дистанционного мониторинга океанической среды.

Эффективность любого подхода к мониторингу во многом определяется физическим механизмом, передающим возмущение среды через измеряемые характеристики поля, или, другими словами, с выбором измеряемой функции. По этому критерию методы мониторинга можно разделить на лучевые, модовые и интерференционные.

Определение поля скоростей звука при использовании лучевого подхода основано на измерении времени задержки импульса вдоль разных лучевых траекторий [1]. Чаще всего, лучевая траектория, вдоль которой производится интегрирование, берется для невозмущенного волновода, что обеспечивает линейную связь возмущений задержки импульса с возмущениями скорости звука. В мелководных звуковых каналах эффективность лучевого метода снижается из-за многократного отражения звука от границ волновода, а в некоторых случаях данный подход становится неприменим.

В модовом методе реконструкция осуществляется по вариациям параметров акустических мод. Исходной информацией могут служить как возмущения фаз отдельных мод, так и времена задержек импульсов на различных модах. Вариация фазы  $n$ -ой моды по сравнению с фазой в невозмущенном волноводе в адиабатическом приближении дается формулой

$$\Delta\Phi_n = \int_0^r (h_n - \tilde{h}_n) dr'.$$

Вариация времени прихода имеет вид

$$\Delta t_n = - \int_0^r \frac{\Delta v_n}{v_n^2} dr',$$

где  $v_n = \frac{\partial \omega}{\partial h_n}$  – групповая скорость  $n$ -ой моды. В данном методе требуется идентификация мод или модовых импульсов, что не всегда возможно и накладывает ограничения на размеры неоднородности [50].

Алгоритмы лучевого и модового мониторинга во многом схожи. Лучевой алгоритм удобен для случая глубокого моря, а модовый – для мелкого моря или приповерхностного звукового канала [1].

В интерференционных методах [1, 38, 51] реконструкция возмущения поля скорости звука осуществляется по измерениям вариации интерференционной структуры пространственно–частотного распределения интенсивности звукового поля. В отличие от модового алгоритма, в реконструкции используются не вариации фаз мод, а возмущения в межмодовой разности фаз, которые определяются косвенным путем по величине возмущений интерференционной структуры.

На практике, измерять разность в фазовых набегках мод  $h_m r - h_n r$  можно различными способами. Один из возможных способов – применение протяженных антенн, осуществляющих пространственную селекцию мод [52]. Однако, для оценки изменения межмодовой разности фаз более привлекательна интерференционная структура, которая определяется данной межмодовой разностью фаз.

В качестве отслеживаемой величины может выступать интенсивность звукового поля на опорной частоте [51]. Другой доступной для измерения величиной является динамика смещения интерференционной структуры в частотной или пространственной области [53, 38]. Для регистрации этих смещений могут использоваться, в частности, прямой и корреляционный методы, описанные выше. Измерения частотных смещений инвариантны по отношению к изменению мощности источника, а в случае применения корреляционного метода и помехоустойчивы.

Модовые методы требуют идентификации мод. В качестве одного из методов селекции можно рассмотреть метод, основанный на стробировании модовых импульсов по времени прихода, что становится возможным благодаря межмодовой дисперсии. Несмотря на то, что данный метод может быть сравнительно легко реализован в техническом смысле, эффективность данного метода ограничена тем, что из-за внутримодовой дисперсии модовые

импульсы могут существенно расплываться по задержкам и деформироваться, что, во-первых, снижает точность определения времени прихода сигнала, во-вторых, усложняет идентификацию модовых импульсов.

Другая сложность, возникающая при идентификации модовых импульсов, связана с динамическими неоднородностями среды. Два соседних модовых импульса с номерами  $l + 1$  и  $l$  можно считать наблюдаемыми, если выполняется неравенство  $|\Delta\tilde{t}_{l+1,l}| < |\Delta\bar{t}_{l+1,l}| + \tau$ , где  $\tau$  — ширина корреляционного отклика или длительность излучаемого импульса,  $\Delta t_{l+1,l} = t_{l+1} - t_l$  разность времен прихода соседних модовых импульсов. Увеличение возмущения ведет к возрастанию  $\Delta\tilde{t}_{l+1,l}$ , что, в свою очередь, ухудшает идентификацию мод. Таким образом, неоднородность налагает принципиальное ограничение на возможность разрешения мод [12].

Использование фазы сигнала ограничивает размеры неоднородности еще и тем, что неоднородность не должна вызывать изменение фазы более чем на  $2\pi$ .

Как свидетельствуют расчеты и измерения, наиболее эффективным способом селекции мод низкочастотного звукового поля в мелком море является пространственно-частотная фильтрация узкополосных, сложномодулированных импульсов с помощью вертикальных антенных решеток [54]. Но использование данного метода значительно усложняет процедуру измерения.

Важнейшим преимуществом интерференционных методов перед модовыми является то, что они не требуют разрешения модовых лучей, что снимает ограничение на размеры исследуемых неоднородностей. Условие, накладываемое на минимально различимый частотный сдвиг, при котором можно считать, что соседние максимумы разрешаются, можно представить в виде [12]

$$|\Delta\Omega(t)| > \frac{2}{r_0 \Delta l |\partial\alpha/\partial\omega|},$$

где  $\Delta l$  — число конструктивно интерферирующих мод. Таким образом, увеличение интенсивности возмущения облегчает возможность разрешения соседних импульсов.

Также к преимуществам интерференционного метода следует отнести и то, что он не требует точного измерения времени распространения сигнала (или его фазы), что в свою очередь требует высокой точности определения расстояния между источником и приемником. А это повышает устойчивость к влиянию погрешностей определения координат источников и приемников [54].

## § 1.7. Заключение

В главе приведен краткий библиографический обзор материала, использовавшегося в настоящей работе. Проведено описание модели мелкого моря и динамических неоднородностей среды – интенсивных внутренних волн и поверхностного волнения. Приведены основные выражения модового подхода, используемого при расчете звукового поля. Описаны общие свойства интерференционной структуры звукового поля и интерференционного инварианта как способа ее описания. Приведены выражения, связывающие временные и пространственные частотные смещения с дисперсионными характеристиками волновода. Рассмотрены прямой и корреляционный методы регистрации смещений интерференционных максимумов звукового поля. Описаны преимущества и недостатки этих методов. Проведен анализ результатов, полученных различными авторами в рамках задач мониторинга океанической среды.

## ГЛАВА 2. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

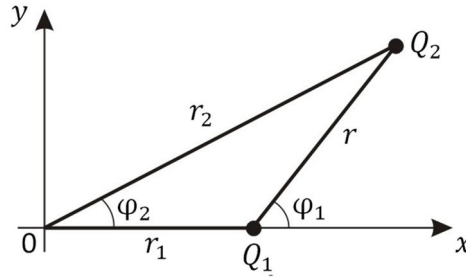
### § 2.1. Краткое введение

Вопрос о пространственных частотных смещениях, обусловленных случайными двумерными полями в горизонтальной плоскости, в приближении независимости нормальных волн рассматривался в работе [39]. При этом подробно исследован только случай кругового разнесения точек наблюдения, позволяющий решать обратные задачи [46, 47], и обсуждены две частные схемы расположения точек наблюдения применительно к изотропному полю возмущения. В настоящей главе развиваются результаты работы [39], получены выражения для пространственных частотных смещений интерференционных максимумов, обусловленных двумерным случайным анизотропным возмущением океанической среды. Проанализированы частные случаи расположения точек наблюдения по отношению к возмущению океанической среды. Показана взаимосвязь между частотными смещениями максимумов поля и изменениями разности фазы между интерферирующими нормальными волнами [55]. В параграфе 2.2 получено выражение для среднеквадратичного отклонения частотного сдвига от невозмущенного значения. Рассмотрены частные случаи разнесения точек наблюдения: продольный и поперечный. В параграфе 2.3 проанализирована возможность решения прямой задачи распространения звукового поля в океаническом волноводе на основе частотных смещений.

### § 2.2. Частотные смещения

При отсутствии возмущения волновод считается горизонтально-однородным. Считается, что амплитуды мод медленно изменяются по частоте и расстоянию по сравнению с быстро осциллирующими фазами, что характерно для крупномасштабных неоднородностей, как, например, поверхностное волнение или внутренние волны. Это позволяет заменить неоднородность фазовым экраном, который воздействует только на фазу распространяющейся нормальной волны, но не на ее амплитуду, что эквивалентно условию адиабатичности.

Геометрия расположения точек наблюдения  $Q_1(\mathbf{r}_1, z)$ ,  $Q_2(\mathbf{r}_2, z)$  в горизонтальной плоскости  $z = \text{const}$  показана на рис. 2.1. Здесь  $\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{n}_{1,2}r_{1,2}$ , где  $r_{1,2}$  – горизонтальные удаления точек наблюдения  $Q_{1,2}$  от точечного источника ( $r_{1,2} \gg \lambda$ ), расположенного в начале координат, а  $\mathbf{n}_{1,2}$  – единичные векторы в их направлении. В приближении независимости нормальных волн поле источника  $\psi$  записывается в виде (1.6).



**Рис. 2.1.** Геометрия расположения точек наблюдения  $Q_1$  и  $Q_2$  в горизонтальной плоскости  $(x, y)$ .  $OQ_1 = r_1$ ,  $OQ_2 = r_2$ ,  $Q_1Q_2 = r$ .

Пусть возмущением дисперсионной характеристики волновода являются фоновые внутренние волны  $\zeta(z, \mathbf{r}) = \Psi_1(z)\upsilon(\mathbf{r})$ , в представлении которых можно ограничиться только собственной функцией  $\Psi_1(z)$  первой моды. Тогда поправка для постоянной распространения  $l$ -й моды дается выражением

$$\tilde{h}_l(\omega, \mathbf{r}) = -\upsilon(\mathbf{r}) \frac{Q\omega^2}{\bar{h}_l(\omega)\bar{c}_0^2} \int_0^H N^2(z) \Psi_1(z) \bar{\varphi}_l^2(\omega, z) dz.$$

Здесь  $N(z)$  – частота плавучести;  $\bar{c}_0$  и  $\bar{\varphi}_l$  – скорость звука на поверхности  $z = 0$  и собственная функция  $l$ -моды невозмущенного волновода;  $H$  – глубина волновода;  $Q \approx 2.4$   $c^2/\text{м}$  – константа, определяемая физическими свойствами воды. Если возмущением является, например, поверхностное волнение  $s(\mathbf{r})$ , то

$$\tilde{h}_l(\omega, \mathbf{r}) = \frac{s(\mathbf{r})}{2\bar{h}_l(\omega)} \left( \frac{d\bar{\varphi}_l(\omega, 0)}{dz} \right)^2.$$

Положения выделенного максимума поля в точках наблюдения  $Q_{1,2}$  на частотах  $\Omega_{1,2}$  обозначим через  $\Omega(\mathbf{r}_{1,2})$ . Значения  $\Omega_2$  и  $\Omega_1$  удовлетворяют условию сохранения фазы для конструктивно интерферирующих мод (1.21).

Данное условие инвариантно по отношению к комбинации номеров мод, т.е. для номеров  $(m_1, n_1)$  и  $(m_2, n_2)$  равенство сохраняется. Разложим фазу в левой части (1.21) в окрестности точки  $\Omega_1$ , ограничившись линейными членами, и воспользуемся представлением (1.22) – (1.24). В результате для частотного сдвига  $\Delta\Omega(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ , полагая выполнение неравенств  $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \ll r_{1,2}$  и  $|\partial\tilde{\alpha}(\Omega_1)/\partial\omega| \ll |\partial\bar{\alpha}(\Omega_1)/\partial\omega|$ , получаем



$$\begin{aligned}\Delta\Omega(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) &= \Omega(\mathbf{r}_2) - \Omega(\mathbf{r}_1) = -b \left[ \int_0^{r_2} \alpha(\Omega_1, \mathbf{n}_2 r'') dr'' - \int_0^{r_1} \alpha(\Omega_1, \mathbf{n}_1 r') dr' \right] = \\ &= -b\Delta\Phi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = -b[\Delta\Phi_{(l+1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) - \Delta\Phi_l(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)],\end{aligned}\quad (2.1)$$

так что частотный сдвиг с точностью до множителя  $(-b)$  воспроизводит разность фаз  $\Delta\Phi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$  интерферирующих  $(l+1)$  и  $l$  нормальных волн между точками приема. Здесь  $b = [r_1 \partial\bar{\alpha}(\Omega_1)/\partial\omega]^{-1}$  – частотный период интерференции между  $(l+1)$  и  $l$  модами на расстоянии  $r_1$ ,  $\partial\bar{\alpha}(\Omega_1)/\partial\omega = (1/\bar{c}_{gl(l+1)}(\Omega_1)) - (1/\bar{c}_{gl}(\Omega_1))$ ,  $\bar{c}_{gl}$  – невозмущенная групповая скорость  $l$ -моды. Частотный сдвиг содержит как среднюю (регулярную)  $\Delta\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1$ , так и случайную (флуктуационную)  $\Delta\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_1$  компоненты,  $\Delta\Omega = \Delta\bar{\Omega} + \Delta\tilde{\Omega}$ , обусловленные дисперсионными характеристиками  $\bar{\alpha}$  и  $\tilde{\alpha}$ , и изменением расстояния. Уравнение (2.1) определяет локализацию интерференционной полосы в системе координат «частотный сдвиг – расстояние» между точками наблюдения. Ниже аргумент  $\Omega_1$  у соответствующих величин опускается, если это не вызывает вопросов.

В силу инвариантности частотного сдвига к номерам интерферирующих однотипных мод, согласно (1.21) и (2.1), разность фаз  $\Delta\Phi_{mn}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$  мод номеров  $m$  и  $n$  равна

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{mn}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) &= \Delta\Phi_m(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) - \Delta\Phi_n(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = -\Delta\Omega/b_{mn}, \\ b_{mn} &= [r_1 \partial\bar{h}_{mn}/\partial\omega]^{-1},\end{aligned}\quad (2.2)$$

т.е. для любой пары однотипных мод  $(m, n)$  разность фаз  $\Delta\Phi_{mn}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$  равна произведению частотного сдвига  $\Delta\Omega$  на весовой множитель  $(-1/b_{mn})$ , определяемый частотным масштабом интерференции этих мод. Таким образом, регистрируя частотные смещения, можно изучать интерференционную картину, формируемую в условиях многомодового распространения. Данный подход к интерферометрическим измерениям весьма актуален в мелком море, когда моды не разрешаются.

Регулярная составляющая частотного сдвига, согласно (2.1), равна

$$\Delta\bar{\Omega} = -b(r_2 - r_1)\bar{\alpha},\quad (2.3)$$

где с точностью до квадратичного члена малости  $r^2/r_1^2$  разность расстояний точек наблюдения от источника (рис. 2.1) дается выражением:

$$r_2 - r_1 = r(\cos\varphi_1 + r\sin^2\varphi_1/2r_1).\quad (2.4)$$

Учитывая определение ИИ  $\bar{\beta}$  [10], соотношение (2.3) можно представить также в виде

$$\Delta\bar{\Omega} = \frac{\bar{\beta}\Omega_1(r_2 - r_1)}{r_1}.$$

В мелком море интерференционный инвариант однотипных групп мод – величина порядка нескольких единиц, методы измерения которого, не прибегая к регистрации частотных смещений, изложены в работе [37].

Запишем разложение флуктуационной компоненты однородного случайного поля  $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$  в двумерный интеграл Фурье [56]

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}(\mathbf{v}) \exp(i\mathbf{v}\mathbf{r}) d^2\mathbf{v}. \quad (2.5)$$

Здесь  $\hat{\alpha}(\mathbf{v})$  – пространственная спектральная амплитуда поля  $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(v_x, v_y)$  – волновой вектор,  $d^2\mathbf{v} = dv_x dv_y$ . Используя разложение (2.5), можно выразить флуктуационную составляющую частотного сдвига в соответствии с (2.1), что дает

$$\Delta\tilde{\Omega}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = -b \left[ r_2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}(\mathbf{v}) \exp(i\xi_2) \frac{\sin \xi_2}{\xi_2} d^2\mathbf{v} - r_1 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}(\mathbf{v}) \exp(i\xi_1) \frac{\sin \xi_1}{\xi_1} d^2\mathbf{v} \right], \quad (2.6)$$

где  $\xi_2 = (v_x r_{2x} + v_y r_{2y})/2 = \mathbf{v}\mathbf{r}_2/2$ ,  $r_{2x} = r_2 \cos \varphi_2$ ,  $r_{2y} = r_2 \sin \varphi_2$ ;  $\xi_1 = v_x r_1/2 = \mathbf{v}\mathbf{r}_1/2$ . У однородного случайного поля  $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$  спектральные амплитуды  $\hat{\alpha}(\mathbf{v}')$  и  $\hat{\alpha}(\mathbf{v}'')$  дельта-коррелированы по  $\mathbf{v}$  [56]

$$\overline{\hat{\alpha}(\mathbf{v}')\hat{\alpha}(\mathbf{v}'')} = F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v}')\delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}''). \quad (2.7)$$

Здесь  $F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v}')$  – пространственный спектр поля  $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$ . Средний квадрат флуктуаций частотных смещений (2.6), представляющий структурную функцию  $D_{\tilde{\Omega}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$  случайного поля  $\tilde{\Omega}(\mathbf{r})$  частотных положений максимумов, в силу (2.7) равен

$$D_{\tilde{\Omega}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = b^2 \left[ r_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v}) T_2^2(\mathbf{v}\mathbf{r}_2/2) d^2\mathbf{v} + r_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v}) T_1^2(\mathbf{v}\mathbf{r}_1/2) d^2\mathbf{v} - \right. \\ \left. - 2r_1 r_2 \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v}) T_1(\mathbf{v}\mathbf{r}_1/2) T_2(\mathbf{v}\mathbf{r}_2/2) \cos[(v_x(r_{2x} - r_1) + v_y r_{2y})/2] d^2\mathbf{v} \right] \quad (2.8)$$

где  $T_{1,2} = \sin \xi_{1,2}/\xi_{1,2}$ . При  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  структурная функция обращается в нуль,  $D_{\tilde{\Omega}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) = 0$ .

Сомножители  $T_{1,2}$  под знаками интегралов в (2.8) подавляют пространственные частоты  $v_x$ ,  $v_y$ , удовлетворяющие условиям  $|v_x| > 2\pi/r_1$ ,  $|v_x r_{2x} + v_y r_{2y}| > 2\pi$ , т.е. сглаживают быстрые (в масштабах  $r_1$ ,  $r_{2x}$ ,  $r_{2y}$ ) изменения  $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$ . Можно сказать, что эта операция отвечает действию пространственных фильтров с передаточными функциями  $T_{1,2}$ . Полоса пропускания

таких фильтров определяется отношением  $r_1/\Delta r_x$ ,  $r_{2x}/\Delta r_x$ ,  $r_{2y}/\Delta r_y$  где  $\Delta r_{x,y}$  – радиусы корреляции поля  $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$  в направлении осей  $x, y$  (для анизотропных полей радиусы корреляции по разным направлениям неодинаковы). Ширина спектра  $\Delta v_{x,y}$  и радиус корреляции  $\Delta r_{x,y}$  связаны соотношением “неопределенности” (размытости):  $\Delta v_x \Delta r_x \geq 1$ ,  $\Delta v_y \Delta r_y \geq 1$  [56]. При этом коротко–коррелированным полям ( $\Delta r_{x,y}$  малы) соответствуют широкие пространственные спектры ( $\Delta v_{x,y}$  велики), тогда как при больших радиусах корреляции (долго–коррелированные поля) ширина спектра мала. Таким образом, функции  $T_{1,2}$  в той или иной мере сужают спектр входного воздействия и, следовательно, уменьшают средний квадрат флуктуаций частотного сдвига. Характер фильтрации зависит от удаленности точек наблюдения и их расположения по отношению к полю возмущения. Можно пояснить это также следующим образом. Уменьшение длины возмущения вдоль трассы усиливает частоту изменения его знака, что приводит к более частым случайным перескокам фазы на  $\pi$  и, следовательно, к уменьшению интенсивности флуктуаций частотных смещений. Функции  $T_{1,2}$  описывают механизм сглаживания этих флуктуаций.

Рассмотрим случай низкочастотной (длинноволновой) области возмущения и сравнительно коротких трасс, когда выполняются условия  $\xi_{1,2} < \pi/4$ . Тогда можно считать  $T_{1,2} \approx 1$  и выражение (2.8) упрощается

$$\overline{|\Delta \tilde{\Omega}|^2} = b^2(r_2 - r_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v}) d^2\mathbf{v} = b^2(r_2 - r_1)^2 \sigma_{\tilde{\alpha}}^2, \quad \sigma_{\tilde{\alpha}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\alpha}(\mathbf{v}) d^2\mathbf{v}, \quad (2.9)$$

т.е. интенсивность флуктуаций частотного сдвига определяется дисперсией  $\sigma_{\tilde{\alpha}}^2$  возмущения  $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$  и не зависит от ориентации положения точек наблюдения по отношению к его направлению распространения; при этом разность расстояний до точек наблюдения дается соотношением (2.4). Это можно пояснить следующим образом. В длинноволновой области дифракция слабо зависит от ориентации неоднородностей анизотропной среды по отношению к направлению распространения звуковой волны. С уменьшением длины волны и увеличением расстояния, проходимого волной в такой среде, дифракционные эффекты возрастают и накапливаются, что делает их зависимыми от длины и направления расположения точек наблюдения относительно расположения неоднородностей. Очевидно, что оценку (2.9) можно рассматривать как оценку сверху для среднего квадрата флуктуаций частотного сдвига  $\overline{|\Delta \tilde{\Omega}|^2}$ .

Обратимся к вопросу о спектральном разложении  $F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v})$  поля положений максимумов  $\tilde{\Omega}(\mathbf{r})$ . Как известно [56], спектральное разложение и структурная функция связаны соотношением

$$D_{\bar{\Omega}}(\mathbf{r}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F_{\bar{\Omega}}(\mathbf{v})(1 - \cos \mathbf{v}\mathbf{r}) d^2 \mathbf{v}. \quad (2.10)$$

Сравнивая выражения (2.9) и (2.10) находим

$$F_{\bar{\Omega}}(\mathbf{v}) = \frac{b^2}{2} (r_2 - r_1)^2 \frac{F_{\bar{\alpha}}(\mathbf{v})}{(1 - \cos \mathbf{v}\mathbf{r})}. \quad (2.11)$$

Обсудим два частных случая расположения точек наблюдения.

### 2.2.1. Поперечное разнесение

Рассмотрение сводится к разобранным выше случаю, если положить  $\varphi_1 = \pi/2$ . При выполнении условия  $\xi_{1,2} < \pi/4$ , регулярный частотный сдвиг и средний квадрат флуктуаций частотных смещений определяются выражениями (2.3) и (2.9) соответственно, в которых, согласно (2.4), следует положить  $r_2 - r_1 = r^2/2r_1$ .

Проанализируем теперь случай дальней зоны,  $r_{1,2} \gg r^2/\lambda$ . Можно считать, что в точки наблюдения волны приходят по параллельным траекториям,  $r_2 = r_1 = r_0$ . Очевидно, что регулярная составляющая частотного сдвига равна нулю,  $\Delta\bar{\Omega} = 0$ . Флуктуации частотного сдвига, в отличие от (2.1), записываются как

$$\Delta\tilde{\Omega} = -b \int_0^{r_0} [\tilde{\alpha}(x, r) - \tilde{\alpha}(x, 0)] dx. \quad (2.12)$$

Если теперь применительно к (2.12) проделать выкладки, аналогичные выкладкам, приведенным выше, то для интенсивности флуктуаций частотных смещений получаем

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = 2b^2 r_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(v_x r_0/2)}{(v_x r_0/2)^2} (1 - \cos v_y r) F_{\bar{\alpha}}(v_x, v_y) dv_x dv_y. \quad (2.13)$$

Перейдем к полярным координатам в  $\mathbf{v}$ -пространстве:  $F_{\bar{\alpha}}(\mathbf{v}) = F_{\bar{\alpha}}(v, \theta)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(v, \theta)$ ,  $v = |\mathbf{v}|$ . Положим, что пространственный спектр факторизуется

$$F_{\bar{\alpha}}(v, \theta) = G_{\bar{\alpha}}(v) W_{\bar{\alpha}}(\theta), \quad (2.14)$$

т.е. на каждой пространственной частоте волнового спектра  $G_{\bar{\alpha}}(v)$  одинаковое распределение  $W_{\bar{\alpha}}(\theta)$  интенсивности возмущения по углу. Угловой спектр  $W_{\bar{\alpha}}(\theta) = \int_0^{\infty} F_{\bar{\alpha}}(v, \theta) v dv$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_{\tilde{\alpha}}(\theta) d\theta = 1.$$

Переходя в (2.13) к полярным координатам и вводя переменные  $\eta = vr_0/2$ ,  $\mu = vr$ , получаем

$$|\overline{\Delta\tilde{\Omega}}|^2 = 2b^2r_0^2 \int_0^{\infty} G_{\tilde{\alpha}}(v) H(\eta, \mu) v dv, \quad (2.15)$$

где

$$H(\eta, \mu) = \int_{-\pi}^{\pi} W_{\tilde{\alpha}}(\theta) \frac{\sin^2(\eta \cos \theta)}{(\eta \cos \theta)^2} [1 - \cos(\mu \sin \theta)] d\theta. \quad (2.16)$$

Оценим средний квадрат флуктуаций частотных смещений в случае сильной анизотропии, характерной для фоновых внутренних волн на океаническом шельфе [28]. С этой целью зададим угловой спектр  $W_{\tilde{\alpha}}(\theta)$  прямоугольной функцией с малой шириной  $\Delta\theta$

$$W_{\tilde{\alpha}}(\theta) = \begin{cases} 2\pi/\Delta\theta, & -(\Delta\theta/2) + \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + (\Delta\theta/2), \\ 0, & \theta < \theta_0 - (\Delta\theta/2), \quad \theta > \theta_0 + (\Delta\theta/2). \end{cases} \quad (2.17)$$

Рассмотрим отдельно два примера.

**Пример 1.** Положим  $\theta_0 = 0$ , что соответствует распространению возмущения вдоль трассы, т.е. волновой фронт перпендикулярен трассе. Соответствующее (2.17) выражение (2.16) имеет вид

$$H(\eta, \mu) = \frac{\pi}{3} (\Delta\theta)^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \sin^2\left(\frac{vr_0}{2}\right),$$

при этом, согласно (2.15), принимая во внимание обозначение коэффициента  $b$  (см. пояснение к (2.1)), средний квадрат флуктуаций частотных смещений

$$|\overline{\Delta\tilde{\Omega}}|^2 = \frac{2\pi}{3} \frac{(\Delta\theta)^2}{(\partial\tilde{\alpha}/\partial\omega)^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \int_0^{\infty} G_{\tilde{\alpha}}(v) \sin^2(vr_0/2) v dv.$$

Видно, что интенсивность флуктуаций частотного сдвига ослабляется с увеличением расстояния  $r_0$  между источником и точками наблюдения, и повышается с ростом расстояния  $r$  между точками наблюдения, ширины  $\Delta\theta$  углового спектра возмущения. В предельном случае дельта-функции углового спектра,  $W_{\tilde{\alpha}}(\theta) = \delta(\theta - \theta_0)$ ,  $|\overline{\Delta\tilde{\Omega}}|^2 = 0$ .

**Пример 2.** Пусть  $\theta_0 = \pi/2$ , т.е. трасса расположена вдоль волнового фронта возмущения. Тогда при выполнении условия  $(\Delta\theta)^2 \ll (6/vr_0)^2$  функция (2.16) записывается как

$$H(\eta, \mu) = 2\pi(1 - \cos\mu) \quad (2.18)$$

и выражение (2.15), считая  $\mu \ll 1$ , принимает вид

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = 2\pi \frac{r^2}{(\partial\bar{\alpha}/\partial\omega)^2} \int_0^\infty G_{\bar{\alpha}}(v) v^3 dv, \quad (2.19)$$

так что интенсивность флуктуаций частотных смещений, в отличие от предыдущего примера, не зависит от расстояния до точек наблюдения.

### 2.2.2. Продольное разнесение

Источник и точки приема расположены на одной прямой:  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ,  $r_2 = r_1 + r$  (см. рис. 2.1). Регулярная составляющая частотного сдвига равна

$$\Delta\bar{\Omega} = -\frac{r}{r_1} \frac{\bar{\alpha}}{(\partial\bar{\alpha}/\partial\omega)} = \bar{\beta}\Omega_1 \frac{r}{r_1}. \quad (2.20)$$

Флуктуации частотного сдвига, согласно (2.3) и (2.8), записываются как:

$$\Delta\tilde{\Omega} = -b \int_{r_1}^{r_2} \exp(iv_x x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}(v_x, v_y) dv_x dv_y. \quad (2.21)$$

Для среднего квадрата  $\Delta\tilde{\Omega}$  в соответствии с (2.21) получаем:

$$D_{\tilde{\Omega}}(r) = \overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = b^2 r^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tilde{\alpha}}(v_x, v_y) \frac{\sin^2(v_x r/2)}{(v_x r/2)^2} dv_x dv_y. \quad (2.22)$$

В длинноволновом приближении в случае небольших расстояний между точками наблюдения,  $v_x < \pi/2r$ , как и прежде (см. (2.9)), интенсивность флуктуаций частотного сдвига:

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = b^2 r^2 \sigma_{\tilde{\alpha}}^2$$

полностью определяется дисперсией возмущения  $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$  и не зависит от ориентации положения точек наблюдения по отношению к направлению распространения возмущения волновода.

Выясним, как связаны пространственные спектры возмущения дисперсионной характеристики  $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$  и частотных положений максимумов поля  $\tilde{\Omega}(\mathbf{r})$ . В рассматриваемом случае спектральное разложение и структурная функция определяются соотношением [56]:

$$D_{\tilde{\Omega}}(r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tilde{\Omega}}(v_x, v_y) (1 - \cos v_x r) dv_x dv_y. \quad (2.23)$$

Дифференцируя (2.22) и (2.23) по  $r$ , получаем соответственно

$$\frac{\partial D_{\tilde{\Omega}}(r)}{\partial r} = 2b^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tilde{\alpha}}(v_x, v_y) \frac{\sin(v_x r)}{v_x} dv_x dv_y,$$

$$\frac{\partial D_{\tilde{\Omega}}(r)}{\partial r} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tilde{\Omega}}(v_x, v_y) v_x \sin(v_x r) dv_x dv_y,$$

из сравнения которых между собой находим

$$F_{\tilde{\Omega}}(v_x, v_y) = b^2 \frac{F_{\tilde{\alpha}}(v_x, v_y)}{v_x^2}.$$

Если теперь перейти к полярным координатам в  $v$ -пространстве и представить пространственный спектр возмущения в форме (2.14), то, выражение (2.22) примет вид:

$$\overline{|\Delta \tilde{\Omega}|^2} = b^2 r^2 \int_0^{\infty} G_{\tilde{\alpha}}(v) N(\tau) v dv, \quad (2.24)$$

где

$$N(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} W_{\tilde{\alpha}}(\theta) \frac{\sin^2(\tau \cos \theta)}{(\tau \cos \theta)^2} d\theta.$$

Здесь  $\tau = vr/2$ . Полагая, что угловой спектр задается соотношением (2.17), рассмотрим средний квадратичный частотный сдвиг для некоторых случаев направлений распространения возмущения относительно трассы:  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_0 = \pi/2$ .

Пусть  $\theta_0 = 0$ , тогда

$$N(\tau) = 2\pi \frac{\sin^2(vr/2)}{(vr/2)^2}$$

и (2.24) примет вид

$$\overline{|\Delta \tilde{\Omega}|^2} = 2\pi \frac{r^2}{r_1^2 (\partial \tilde{\alpha} / \partial \omega)^2} \int_0^{\infty} G_{\tilde{\alpha}}(v) \frac{\sin^2(vr/2)}{(vr/2)^2} v dv.$$

Если  $vr/2 < \pi/4$ , то  $\sin(vr/2) \approx vr/2$ , и

$$\overline{|\Delta \tilde{\Omega}|^2} = 2\pi \frac{r^2}{r_1^2 (\partial \tilde{\alpha} / \partial \omega)^2} \int_0^{\infty} G_{\tilde{\alpha}}(v) v dv, \quad (2.25)$$

так что интенсивность флуктуаций частотных смещений инвариантна по отношению к анизотропии поля возмущения.

Положим  $\theta_0 = \pi/2$ . При условии  $(\Delta \theta)^2 \ll (6/vr_1)^2$ , согласно (21),  $N(\eta, \mu) = 2\pi$  и выражение для среднего квадратичного частотного сдвига сводится к (2.25). При сильной анизотропии возмущения, как и следовало ожидать, наибольший уровень флуктуаций частотных смещений имеет место при угле  $\theta_0 = \pi/2$ .

## § 2.3. Статистические характеристики акустических полей

### 2.3.1. Флуктуации интерференционного инварианта

Изменчивость ИИ  $\beta$  рассмотрим применительно к продольному разнесению точек наблюдения, как обычно это принято. В рамках численного моделирования влияние внутренних волн и поверхностного волнения на поведение ИИ обсуждалось в работах [37, 28,57-59], однако аналитически задача оценки влияния возмущения на статистические характеристики ИИ не получила до настоящего времени общего решения.

При возмущении океанической среды ИИ, согласно [10], представим в виде

$$\beta = \bar{\beta} + \tilde{\beta},$$

где  $\bar{\beta} = (\Delta\bar{\Omega}/\Omega_1)(r_1/r)$  – регулярная составляющая,  $\tilde{\beta} = (\Delta\tilde{\Omega}/\Omega_1)(r_1/r)$  – флуктуационная составляющая. Согласно (2.3) и (2.24) регулярная составляющая

$$\bar{\beta} = -(\bar{\alpha}/\Omega_1)(\partial\alpha/\partial\omega)^{-1},$$

а среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_\beta = \frac{|\partial\alpha/\partial\omega|^{-1}}{\Omega_1} \left[ \int_0^\infty G_{\bar{\alpha}}(v) N(\tau) v dv \right]^{1/2}.$$

Регулярная составляющая  $\bar{\kappa}$  и среднее квадратичное отклонение  $\sigma_\kappa$  углового коэффициента  $\kappa = \Delta\Omega/r$  линии равной фазы соответственно равны

$$\bar{\kappa} = -\frac{\bar{\alpha}}{r_1} (\partial\bar{\alpha}/\partial\omega)^{-1},$$

$$\sigma_\kappa = \frac{|\partial\alpha/\partial\omega|^{-1}}{r_1} \left[ \int_0^\infty G_{\bar{\alpha}}(v) N(\tau) v dv \right]^{1/2}.$$

Размеры  $\delta r$ ,  $\delta\Omega$  локализованной полосы оценим из условия, что в пределах ее ширины относительно центра  $(r_1, \Omega_1)$  разность фаз между крайними однотипными модами с номерами  $i$  и  $j$  не превышает  $\pi$

$$|h_{ij}(\Omega_1)|\delta r = \pi, \quad |h_{ij}(\Omega_1 + \delta\Omega)|r_1 - |h_{ij}(\Omega_1)|r_1 = \pi.$$

Положим  $h_{ij} = \bar{h}_{ij} + \tilde{h}_{ij}$ , тогда, если воспользоваться линейным приближением для второго условия, получаем:

$$\delta r = \overline{\delta r} + \widetilde{\delta r}, \quad \delta\Omega = \overline{\delta\Omega} + \widetilde{\delta\Omega},$$

где

$$\overline{\delta r} = \frac{\pi}{\bar{h}_{ij}}, \quad \overline{\delta\Omega} = \frac{\pi}{r_1(\partial\bar{h}_{ij}/\partial\omega)}$$

– размеры в отсутствие возмущения,



$$\widetilde{\delta r} = -\overline{\delta r} \frac{\tilde{h}_{ij}}{\overline{h}_{ij}}, \quad \widetilde{\delta \Omega} = -\overline{\delta \Omega} \frac{\partial \tilde{h}_{ij} / \partial \omega}{\partial \overline{h}_{ij} / \partial \omega}$$

– случайные составляющие, обусловленные возмущением. Откуда для среднеквадратичных отклонений размеров интерференционной полосы получаем

$$\sigma_{\delta r} = |\overline{\delta r}| \frac{\sigma_{h_{ij}}}{|\overline{h}_{ij}|}, \quad \sigma_{\delta \Omega} = |\overline{\delta \Omega}| \frac{\sigma_{h'_{ij}}}{|\overline{h'_{ij}}|},$$

где  $\sigma_{h_{ij}}^2 = \overline{\tilde{h}_{ij}^2}$ ,  $\sigma_{h'_{ij}}^2 = \overline{(\tilde{h'_{ij}})^2}$  – средние квадраты случайных процессов  $\tilde{h}_{ij}$  и  $\tilde{h'_{ij}}$  соответственно,  $\tilde{h'_{ij}} = \partial \tilde{h}_{ij} / \partial \omega$ .

### 2.3.2. Флуктуации фазы

Рассмотрим поперечное разнесение точек наблюдения в дальней зоне, ограничившись случаем, когда трасса расположена вдоль волнового фронта возмущения (параграф 2.2.1, пример 2).

Согласно (2.2) и (2.19) выражение для среднего квадрата случайной разности фаз  $\Delta \tilde{\Phi}_{mn}$  имеет вид

$$\overline{|\Delta \tilde{\Phi}_{mn}|^2} = 2\pi \frac{b^2}{b_{mn}^2} (r_0 r)^2 \int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(v) v^3 dv,$$

так что средний квадратичный набег разности фаз мод обратно пропорционален квадрату частотного периода интерференции между ними. Следовательно, увеличение частоты звука и номеров мод влечет за собой возрастание флуктуаций разности фаз нормальных волн.

Пусть случайная фаза  $\tilde{\Phi}_m$  моды номера  $m$  является гауссовой функцией со средним значением, равным нулю,  $\overline{\tilde{\Phi}_m} = 0$ . Разность фаз между точками приема равна:

$$\Delta \tilde{\Phi}_m = \tilde{\Phi}_m(r_0, r) - \tilde{\Phi}_m(r_0, 0) = \int_0^{r_0} [\tilde{h}_m(x, r) - \tilde{h}_m(x, 0)] dx,$$

что для среднего квадрата  $\Delta \tilde{\Phi}_m$  (55), представляющего собой структурную функцию фазы  $\tilde{\Phi}_m$ , дает:

$$\overline{|\Delta \tilde{\Phi}_m|^2} = 2\pi (r_0 r)^2 \int_0^\infty G_{\tilde{h}_m}(v) v^3 dv,$$

где  $G_{\tilde{h}_m}(v)$  – волновой спектр возмущения  $\tilde{h}_m$ . При квадратичном законе изменения структурной функции, реализации фазы представляют собой линейные функции со случайным наклоном. Линейная зависимость  $\tilde{\Phi}_m(r)$  не нарушает когерентности при сложении полей, принимаемых разными участками апертуры. Это приводит лишь к случайному сдвигу диаграммы направленности по отношению к невозмущенной среде. Если величина этого

сдвига превышает ширину характеристики направленности  $\Delta\vartheta = \lambda/r$ , то направленность антенны не будет иметь ничего общего с ее направленностью в отсутствие возмущения. Следует ожидать, что и при распространении нескольких мод линейная зависимость разности фаз вдоль апертуры сохраняется. Сканирование по углу в условиях многомодового распространения, вызванное возмущением, может приводить к нарушению когерентного сложения нормальных волн в пределах апертуры, что приводит к разрушению диаграммы направленности [60]. Критический размер антенны  $r_{cr}$ ,  $r \leq r_{cr}$ , при котором наступает этот фактор, можно рассматривать как поперечный радиус когерентности.

Рассмотрим эти вопросы подробнее. Волновое поле (1.6) в точках приема запишем как:

$$\psi_1 = \sum_m A_m \exp[ih_m r_0 + i\tilde{\Phi}_m(r_0, 0)], \quad \psi_2 = \sum_m A_m \exp[ih_m r_0 + i\tilde{\Phi}_m(r_0, r)],$$

откуда следуют соотношения для фазы

$$\Phi_1 = \arctg \frac{\sum_m A_m \sin[h_m r_0 + \tilde{\Phi}_m(r_0, 0)]}{\sum_m A_m \cos[h_m r_0 + \tilde{\Phi}_m(r_0, 0)]}, \quad \Phi_2 = \arctg \frac{\sum_m A_m \sin[h_m r_0 + \tilde{\Phi}_m(r_0, r)]}{\sum_m A_m \cos[h_m r_0 + \tilde{\Phi}_m(r_0, r)]},$$

что позволяет выражение для разности фаз  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ , считая возмущение фазы  $\tilde{\Phi}_m$  малой величиной по сравнению с невозмущенным значением  $h_m r_0$ ,  $\tilde{\Phi}_m \ll \pi$ , преобразовать к виду:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{|\bar{u}|^2} \sum_m \sum_n A_m A_n \cos(h_m r_0) \cos(h_n r_0) (\Delta\tilde{\Phi}_{mn}), \quad (2.26)$$

где  $\bar{u}$  – поле источника (1.6) в отсутствие возмущения. Если  $m = n$ , то  $\Delta\Phi = 0$ . Как и следовало ожидать, в отсутствие возмущения  $\Delta\Phi = 0$ .

Угол наклона фазового фронта  $\gamma$ , характеризующий угловое смещение диаграммы направленности, определяется по разности фаз

$$\gamma = \frac{\Delta\Phi}{kr},$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число [56]. Откуда для дисперсии угла наклона, используя (2.4) и (2.24), имеем:

$$\sigma_\gamma^2 = \overline{\gamma^2} = \frac{\lambda^2}{(2\pi r)^2} \frac{|\Delta\tilde{\Omega}|^2}{|\bar{u}|^4} w^2, \quad (2.27)$$

где

$$w = \sum_m \sum_n A_m A_n \frac{1}{b_{mn}} \cos(h_m r_0) \cos(h_n r_0), \quad m \neq n.$$

Область допустимых флуктуаций угла  $\gamma$ , для которых выполнено неравенство

$$\sigma_\gamma \leq \Delta\vartheta/2, \quad (2.28)$$

определим как критерий приемлемого сдвига диаграммы направленности. Условие (2.28), согласно (2.27), накладывает на среднеквадратичное отклонение частотного сдвига  $\sigma_{\Delta\tilde{\omega}}$  ограничение:  $\sigma_{\Delta\tilde{\omega}} \leq \frac{\pi|\bar{u}|^2}{w}$ , которому, учитывая (2.19), можно придать форму:

$$r \leq r_* = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|\bar{u}|^2}{br_0 w} \left[ \int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(v) v^3 dv \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

Критическое значение расстояния  $r_{cr}$  (поперечный радиус когерентности) между точками наблюдения можно оценить из соображений синфазности нормальных волн при среднеквадратичном угле наклона  $\sigma_\gamma$  (2.27) фазового фронта [60]. При малых углах,  $\sin \gamma \approx \gamma$ , получаем:

$$r \leq r_{cr} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_{ij} |\bar{u}|^2}{\lambda br_0 w} \left[ \int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(v) v^3 dv \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.30)$$

где  $\rho_{ij} = 2\pi/\bar{h}_{ij}$  – наименьший пространственный период интерференции [19],  $i$  и  $j$  – максимальный и минимальный номера однотипных мод. В рамках численного моделирования влияние фоновых внутренних волн на поведение поперечного радиуса когерентности  $r_{cr}$  обсуждалось в работе [61]. Отметим, что при малых  $r$ ,  $r \ll l_{\tilde{\alpha}}$ , где  $l_{\tilde{\alpha}}$  – поперечный радиус корреляции  $\tilde{\alpha}$ , угол прихода, определяемый направлением нормали к фазовому фронту, совпадает с  $\gamma$  [56]. Отношение  $\varepsilon = r_{cr}/r_*$ , согласно (2.29) и (2.30) равно  $\varepsilon = \rho_{ij}/\lambda$ , так что  $\varepsilon \gg 1$ .

## § 2.4. Заключение

Для произвольной геометрии расположения точек наблюдения в горизонтальной плоскости, описаны статистические характеристики пространственных частотных смещений, вызванных двумерным случайным анизотропным возмущением океанической среды. Задача рассматривалась в приближении независимости нормальных волн. Подробно рассмотрены случаи продольного и поперечного разнесения точек наблюдения. Проанализированы статистические характеристики ИИ, а также смещения диаграммы направленности и изменения поперечного радиуса когерентности.

### ГЛАВА 3. ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ВОЛНЕНИЯ НА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННУЮ КАРТИНУ

#### § 3.1. Краткое введение

В данной главе представлены результаты исследования влияния поверхностного волнения на формирование интерференционной структуры звукового поля в мелководном океаническом волноводе. Поверхностное волнение (ПВ) также играет заметную роль в формировании случайных неоднородностей океана. Отличительная особенность данного возмущения состоит в том, что спектр ПВ по сравнению фоновыми внутренними волнами является более высокочастотным. Поэтому важно понять, какой результат можно получить, применяя подход, основанный на информации о частотных смещениях.

В параграфе 3.2, в рамках численного моделирования, получены статистические оценки для интерференционного инварианта и ошибки в определении угла наклона интерференционной полосы. Рассмотрение проведено как для зимней, так и для летней гидрологии в широких диапазонах частот и расстояний [59]. В параграфе 3.3 дано общее аналитическое решение задачи о связи между временными спектрами частотных смещений интерференционной картины и возмущением поверхности океана. В параграфе 3.4 определяется взаимосвязь временных спектров частотных смещений и поверхностного волнения, и обсуждаются возможности диагностики частотного (временного) спектра развитого поверхностного волнения [62].

#### § 3.2. Вариации интерференционного инварианта

Невозмущенный профиль скорости звука показан на рис. 3.1, где линии 1 и 2 соответствуют зимней и летней гидрологиям. Глубина источника 50 м, приемника – 40 м, расстояние между ними варьируется в пределах  $r = 10\text{--}100$  км. Диапазоны излучения  $\Delta f$ : 150–170, 250–270, 350–370 Гц. Параметры однородного поглощающего жидкого дна: плотность  $1800 \text{ кг/м}^3$ , скорость  $1800 \text{ м/с}$ , мнимая часть показателя преломления 0.01. Для моделирования ПВ использовался спектр Пирсона–Неймана, скорость ветра  $9 \text{ м/с}$ . Акустическая трасса ориентирована вдоль направления ветра. Длительность случайной реализации поверхностного волнения 1 час, шаг дискретизации 5 мин.

При рассмотрении интерференционного инварианта (ИИ)  $\beta_0$  [10] использовался интегральный подход [37] (см. параграф 1.4).

Полуширина окна:  $\Delta r = 0.5$  км,  $\Delta f = 10$  Гц; интервалы дискретизации:  $\delta r = 0.5$  м,  $\delta f = 0.5$  Гц. Результаты расчета нормированной кривой  $\hat{\Phi}(\beta) = \Phi(\beta)/\Phi(\beta_0)$  для одной и той же случайной реализации ПВ приведены на рис. 3.2, 3.3.

Для зимней гидрологии на малых расстояниях и низких частотах зависимость  $\hat{\Phi}(\beta)$  для возмущенного волновода практически не отличается от зависимости в отсутствие возмущения. При увеличении частоты и расстояния различие между ними усугубляется. Эта особенность объясняется усилением эффектов многократного рассеяния звуковых волн на ПВ с ростом частоты звука и их накоплением по мере удаления от источника. Для рассматриваемых частотных диапазонов и интервалов расстояний значение ИИ остается близким к единице, однако возрастает ширина  $\Delta\beta$  функции  $\hat{\Phi}(\beta)$ .

При летней гидрологии, в отличие от зимней, влияние ПВ менее значительно. Заметное отличие кривых  $\hat{\Phi}(\beta)$  наблюдается лишь на малых расстояниях в высокочастотном диапазоне. Указанное различие между гидрологиями связано с модовой структурой звукового поля, вызывающей преимущественное рассеивание на ПВ донно-поверхностных мод, вес которых с увеличением расстояния снижается.

По выборкам  $\{x(t_i)\}$ ,  $x = \beta_0, \Delta\beta$ , вычислены средние значения  $\bar{x}$ :

$$\bar{x}(r) = (1/I) \sum_{i=1}^I x(r, t_i), \quad I = 12. \quad (3.1)$$

Зависимости величин  $\bar{\beta}_0(r)$  и  $\bar{\Delta\beta}(r)$  (на уровне 0.5 от максимума) (3.1), представлены на рис. 3.4, 3.5. Сравнение с невозмущенным волноводом показывает, что ПВ не приводит к заметным изменениям среднего значения ИИ  $\beta_0$ , однако они могут быть существенными для средней ширины  $\Delta\beta$ , что связано с уменьшением числа синфазных мод.

Таким образом, рассеяние звука на неоднородностях ПВ, как и в случае возмущения среды фоновыми внутренними волнами [57], не приводит к разрушению локализованной интерференционной картины.

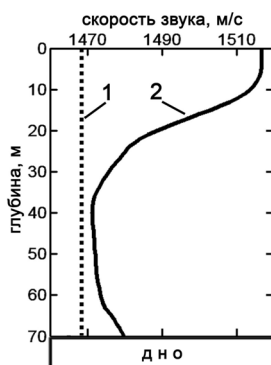
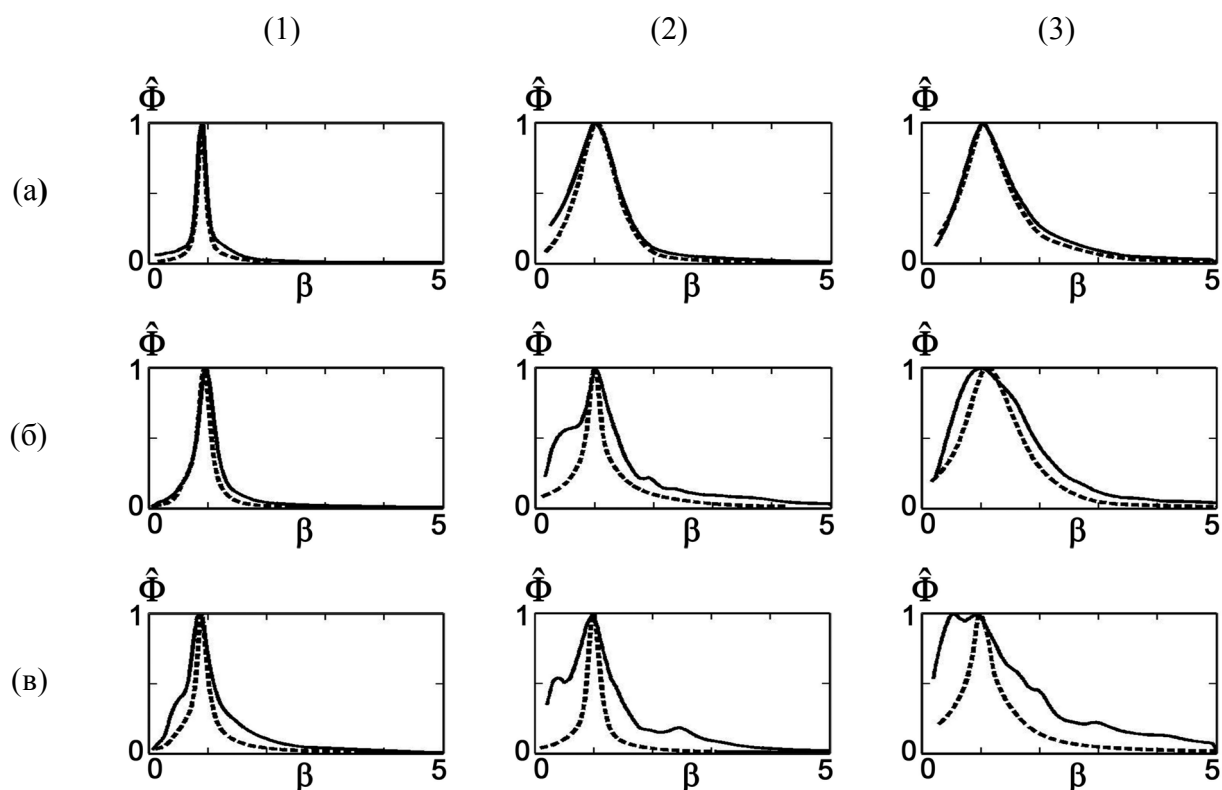
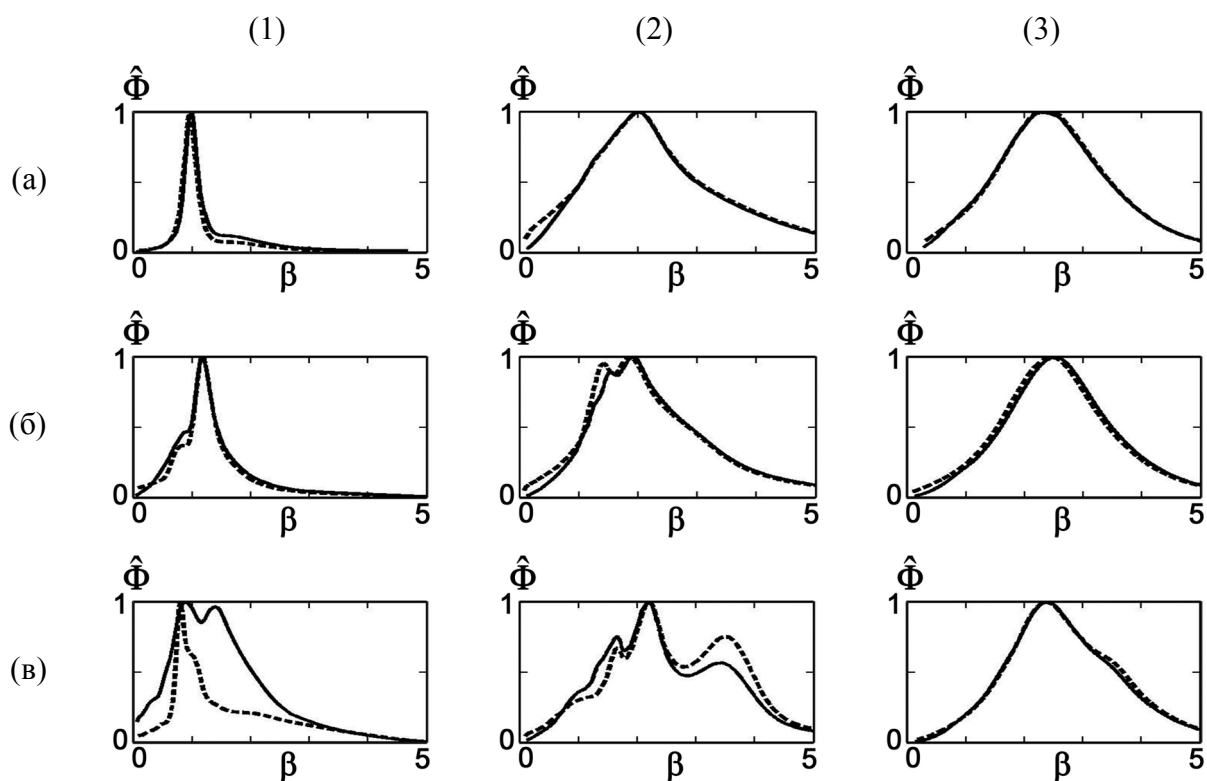


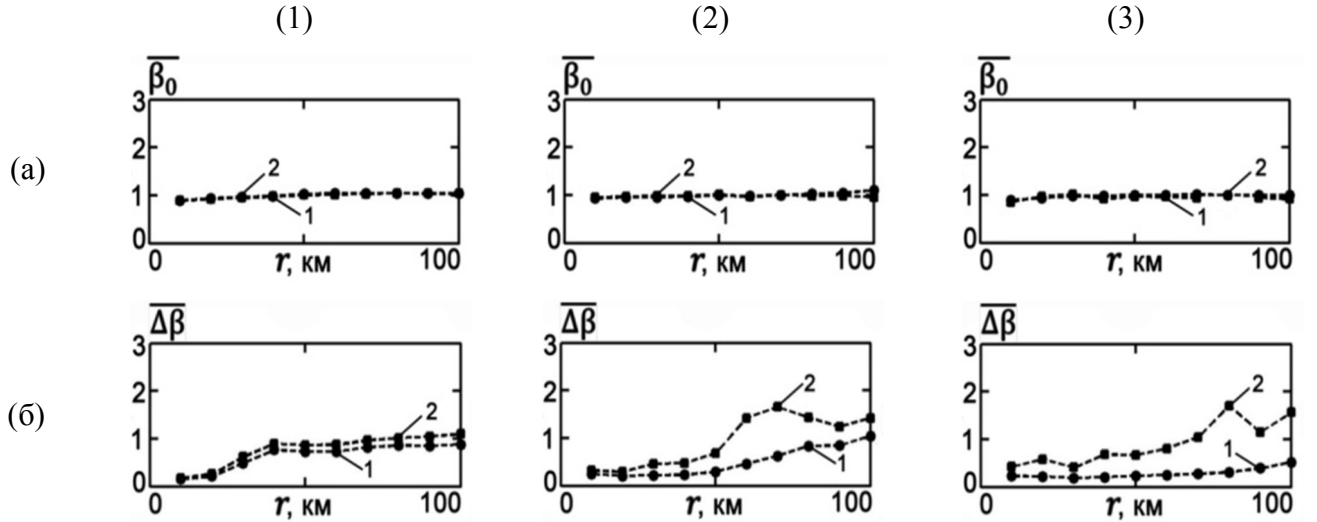
Рис. 3.1. Профиль скорости звука.



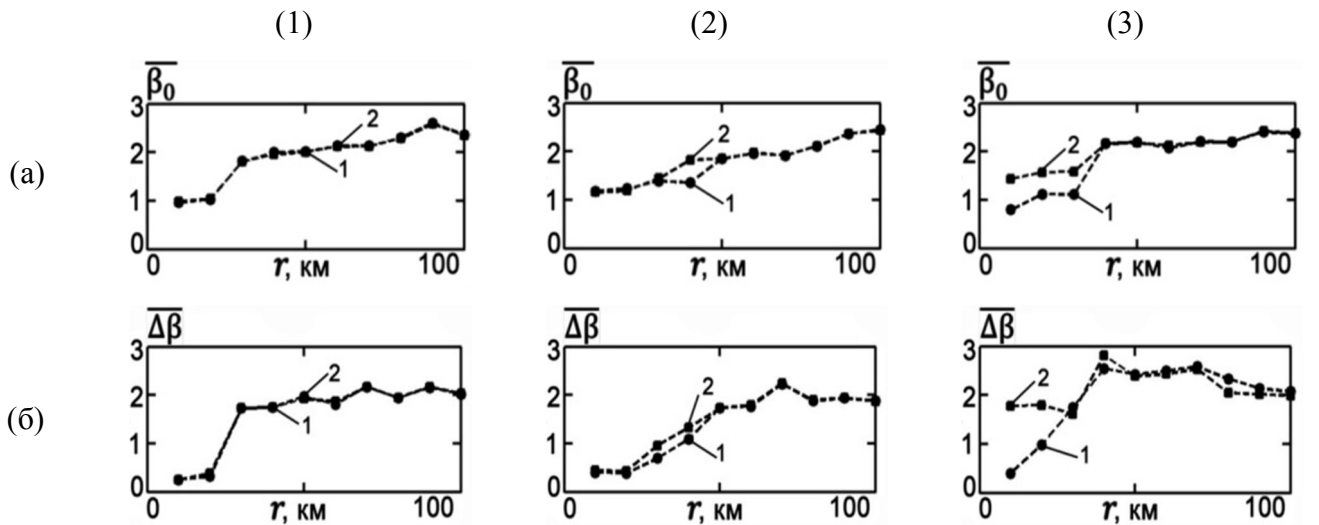
**Рис. 3.2.** Зависимость нормированной функции  $\hat{\Phi}$  от параметра  $\beta$  в окрестности расстояний  $r_0$ : 10 км (1); 50 км (2); 100 км (3). Диапазон частот: (150–170) Гц (а); (250–270) Гц (б); (350–370) Гц (в). Пунктир – без ПВ, сплошная линия – при ПВ. Зимняя гидрология.



**Рис. 3.3.** Обозначения те же, что на рис. 3.2. Летняя гидрология.



**Рис. 3.4.** Зависимость величин  $\bar{\beta}_0$  (а) и  $\Delta\bar{\beta}$  (б) от расстояния  $r$  для различных частотных диапазонов: (150–170) Гц (1); (250–270) Гц (2); (350–370) Гц (3). Кривая 1 – без ПВ, кривая 2 – при ПВ. Зимняя гидрология.



**Рис. 3.5.** Обозначения те же, что на рис. 3.4. Летняя гидрология.

### § 3.3. Временной спектр частотных смещений

Продвижение в описании флуктуаций частотных смещений возможно, если считать частоту  $\nu$  и волновое число  $k = |\mathbf{k}|$  поля возмущения  $\zeta(t, \mathbf{r})$  не независимыми, а подчиняющимися дисперсионному уравнению

$$w(k, \nu) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(k_x, k_y)$  и  $\nu$  – пространственная и циклическая частота;  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r_x, r_y)$  – радиус-вектор в горизонтальной плоскости  $(x, y)$ ;  $t$  – время. В этом случае удастся выразить волновой

спектр через временной спектр, и, следовательно, область интегрирования по  $\nu$  и  $\mathbf{k}$  в разложении Фурье случайных полей становится двумерной, т.е. распространяется на область  $(\nu, \mathbf{k})$ , удовлетворяющую дисперсионному уравнению (3.2). Заметим, что рассматриваются двумерные статистически однородные случайные поля.

Перейдем к полярным координатам в  $k$ -пространстве и предположим, что пространственный спектр  $F_\zeta(k, \theta)$  возмущения  $\zeta(t, \mathbf{r})$  факторизуется,

$$F_\zeta(k, \theta) = V_\zeta(k)W_\zeta(\theta), \quad (3.3)$$

т.е. на каждой частоте волнового спектра  $V_\zeta(k)$  имеем одинаковое распределение интенсивности возмущения по углу  $W_\zeta(\theta)$ , которое удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_\zeta(\theta) d\theta = 1. \quad (3.4)$$

Если теперь дисперсию поля  $\sigma_\zeta^2$  выразить через временной  $Z_\zeta(\nu)$  и пространственный  $F_\zeta(k, \theta)$  спектры,

$$\sigma_\zeta^2 = \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} F_\zeta(k, \theta) k dk d\theta, \quad \sigma_\zeta^2 = \int_0^\infty G_\zeta(\nu) d\nu, \quad (3.5)$$

то из условия эквивалентности этих представлений, используя (3.3), (3.4), получается связь между волновым и временным спектрами:

$$V_\zeta(k) = \frac{1}{k} \frac{d\nu}{dk} G_\zeta[\nu(k)]. \quad (3.6)$$

Здесь  $G_\zeta(\nu) = 2Z_\zeta(\nu)$  – спектральная плотность по частотам  $\nu \geq 0$ .

Как и в [41], ограничимся адиабатическим приближением описания поля. Результаты численных и натурных экспериментов свидетельствуют о том, что в случаях, когда возмущение среды вызвано ФВВ [12, 13, 63], данный подход сохраняет работоспособность и за пределами области его формальной применимости. Не нарушая общности задачи, положим, что трасса расположена вдоль оси  $x$ , точечный источник расположен в начале координат, а точка наблюдения  $Q(\mathbf{L}, z)$  удалена на расстояние  $L$ , где  $\mathbf{L} = \mathbf{n}L$ ,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор в горизонтальной плоскости  $(x, y)$ . Пусть

$$\bar{\alpha}(\omega) = \bar{h}_{l+1}(\omega) - \bar{h}_l(\omega), \quad \tilde{\alpha}(\omega, t, \mathbf{n}r) = \tilde{h}_{l+1}(\omega, t, \mathbf{n}r) - \tilde{h}_l(\omega, t, \mathbf{n}r). \quad (3.7)$$

В отсутствие возмущения волновод считается горизонтально-однородным.

Частотные смещения  $\Omega(t, \mathbf{L})$  можно представить как



$$\Delta\Omega(t, \mathbf{L}) = -\frac{b}{L} \int_0^L \tilde{\alpha}(t, \mathbf{nr}) dr, \quad (3.8)$$

где  $\Delta\Omega$  – циклическая частота;  $b = 1/[\partial\tilde{\alpha}(\Omega_0)/\partial\omega]$ ,  $\Omega_0$  – положение выделенного максимума поля излучения в отсутствие возмущения [41]. Подчеркнем для ясности, что под частотными смещениями подразумеваются случайные временные положения выбранного локального максимума. Используя дисперсионное уравнение (3.2), разложим флуктуации случайного поля  $\tilde{\alpha}(t, \mathbf{r})$ , вызванные возмущением  $\zeta(t, \mathbf{r})$ , в спектр:

$$\tilde{\alpha}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}(k) \exp\{i[\mathbf{k}\mathbf{r} - v(k)t]\} d^2k. \quad (3.9)$$

Подставляя его в (3.8), получаем

$$\Delta\Omega(t, \mathbf{L}) = -b \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi) \exp[-iv(k)t] \tilde{\alpha}(k_x, k_y) dk_x dk_y, \quad \xi = k_x L/2. \quad (3.10)$$

Временная корреляционная функция  $B_\Omega(\tau, \mathbf{L}) = \overline{\Delta\Omega(t + \tau, \mathbf{L}) \Delta\Omega^*(t, \mathbf{L})}$  равна

$$B_\Omega(\tau, \mathbf{L}) = b^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(k_x, k_y) \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \exp[iv(k)\tau] dk_x dk_y. \quad (3.11)$$

Фурье-обращение этого интеграла дает

$$G_\Omega(v, \mathbf{L}) = b^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(k_x, k_y) \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \delta[v(k) - v'(k)] dk_x dk_y. \quad (3.12)$$

Здесь  $G_\Omega(v, \mathbf{L})$  – временной спектр частотных смещений и  $F_\alpha(k_x, k_y)$  – пространственный спектр возмущения дисперсионной характеристики волновода. Знак «тильда» в нижних индексах опущен.  $\delta(x)$  – дельта-функция. Перейдем в (3.10) к полярным координатам и используем (3.3) и (3.6), тогда

$$G_\Omega(v, \mathbf{L}) = b^2 T_\alpha(\eta) G_\alpha(v), \quad (3.13)$$

$$T_\alpha(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} W_\alpha(\theta) \frac{\sin^2(\eta \cos \theta / 2)}{(\eta \cos \theta / 2)^2} d\theta, \quad \eta = k(v)L.$$

Здесь  $W_\alpha(\theta)$  – угловой спектр дисперсионной характеристики, а зависимость  $k(v)$  определяется уравнением (3.2). Функция преобразования  $T_\alpha(\eta)$ , связывающая временные спектры возмущения  $G_\alpha(v)$  и частотных смещений  $G_\Omega(v)$ , подавляет пространственные

частоты возмущения, сравнимые с масштабом трассы, сглаживая при этом быстрые изменения поля возмущения.

Функция преобразования спектров в той или иной мере сужает спектр входного воздействия  $G_\alpha(\nu)$ . Характер фильтрации зависит от ориентации трассы по отношению к угловому распределению интенсивности возмущения, удаленности точки наблюдения и дисперсионного уравнения. Если в пределах ширины углового спектра  $k(\nu)L\cos\theta/2 \leq \pi/4$ , т.е. при

$$L \leq L_l = \frac{\pi}{2k_h(\nu)} = \frac{\lambda_s(\nu)}{4}, \quad (3.14)$$

где  $k_h(\nu) = k(\nu)\cos\theta$  и  $\lambda_s(\nu) = \lambda(\nu)/\cos\theta$  – самые высокие пространственные частоты и самые короткие волны соответственно, тогда можно считать, что  $T_\alpha(\eta) \approx 1$ . В этом случае спектр частотных смещений  $G_\Omega(\nu, \mathbf{L})$  без искажений воспроизводит спектр возмущения  $G_\alpha(\nu)$ . Это объясняется тем, что в области низких частот дифракция в анизотропной среде слабо зависит от направления распространения звуковой волны. С увеличением частоты и расстояния, проходимого волной в такой среде, дифракционные эффекты возрастают, что делает их зависимыми от частоты, длины и расположения трассы. Отметим, что случай  $T_\alpha(\eta) \approx 1$  удовлетворительно реализуется на средних дистанциях ( $L \sim 15$  км) для ФВВ, спектр которых расположен около частоты  $\nu = 0$  [12, 13, 63]. Очевидно, чем больше ширина углового спектра, тем менее критично расположение трассы по отношению к направлению его максимума. В предельном случае – изотропном спектре – функция преобразования спектров инвариантна относительно направления трассы.

### § 3.4. Связь временных спектров частотных смещений и поверхностного волнения

Посмотрим теперь на примере ПВ, что происходит со спектром частотных смещений  $\Delta\Omega(t, \mathbf{L})$ , когда спектр возмущения  $\zeta(t, \mathbf{r})$  сосредоточен в области частоты  $\nu \neq 0$ . Поправка  $\tilde{h}_l(\omega, t, \mathbf{r})$ , обусловленная ветровым волнением, равна

$$\tilde{h}_l(\omega, t, \mathbf{r}) = \frac{\zeta(t, \mathbf{r})}{2\bar{h}_l(\omega)} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}_l(\omega, z=0)}{\partial z} \right)^2. \quad (3.15)$$

Здесь  $\zeta(t, \mathbf{r})$  – случайное двумерное поле вертикальных смещений свободной поверхности  $z = 0$  [64]. Отсюда следует, что пространственные спектры возмущения  $F_\zeta(k, \theta)$  и дисперсионной характеристики  $F_\alpha(k, \theta)$  пропорциональны,

$$F_\alpha(k, \theta) = B^2 F_\zeta(k, \theta),$$

$$B = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\bar{h}_{l+1}} \left[ \frac{\partial \bar{\varphi}_{l+1}(\omega, z=0)}{\partial z} \right]^2 - \frac{1}{\bar{h}_l} \left[ \frac{\partial \bar{\varphi}_l(\omega, z=0)}{\partial z} \right]^2 \right\}. \quad (3.16)$$

В соответствии с (3.13)

$$G_\Omega(v, \mathbf{L}) = \kappa^2 T_\zeta(\eta) G_\zeta(v). \quad (3.17)$$

Здесь  $\kappa^2 = (bB)^2$  – масштабный коэффициент, зависящий от параметров невозмущенного волновода, а функция  $T_\zeta(\eta)$  определяется выражением из (3.13) с заменой  $\alpha \rightarrow \zeta$ . Тогда, при известной функции преобразования, восстановленный по измеренному временному спектру частотных смещений временной спектр ПВ  $G_\zeta^{(r)}(v)$  определяется как

$$G_\zeta^{(r)}(v) = \kappa^{-2} \frac{G_\Omega(v, \mathbf{L})}{T_\zeta(\eta)}. \quad (3.18)$$

Примем, что для полностью развитого волнения временной спектр  $G_\zeta(v)$  является спектром Пирсона–Неймана

$$G_\zeta(v) = C v^{-6} \exp\left(-\frac{2g^2}{v^2 v^2}\right), \quad (3.19)$$

угловой спектр равен

$$W_\zeta(\theta) = \frac{2}{\pi} \cos^2(\theta - \theta_0), \quad |\theta - \theta_0| \leq \frac{\pi}{2}; \quad W_\zeta(\theta) = 0, \quad |\theta - \theta_0| > \frac{\pi}{2}, \quad (3.20)$$

а дисперсионное соотношение (3.2) для гравитационных поверхностных волн имеет вид

$$v^2 = gk. \quad (3.21)$$

Здесь  $C = 2.4 \text{ м}^2/\text{с}^5$ ;  $v$  – скорость ветра;  $g = 9.81 \text{ м}/\text{с}^2$  – гравитационное ускорение;  $\theta_0$  – угол между направлением максимума углового спектра и ориентацией трассы  $\mathbf{L}$  [20]. Спектр  $G_\zeta(v)$  (3.19) максимален на частоте  $v_{m1} = \sqrt{2/3} (g/v)$ .

Проанализируем поведение спектра  $G_\Omega(v, \mathbf{L})$  (3.17) для двух крайних случаев:  $\theta_0 = 0^\circ$  и  $\theta_0 = 90^\circ$ , полагая  $L = 15 \text{ км}$ ,  $v = 12 \text{ м}/\text{с}$ . Нормированный модельный спектр  $\hat{G}_\zeta(v)$ , (3.19), приведен на рис. 3.6 (сплошная линия). Он сосредоточен в области частот (0.3–2.5) Гц, частота максимума спектра  $v_{m1} = 0.67 \text{ Гц}$ .

(i)  $\theta_0 = 0$ , т.е. максимум углового спектра ориентирован вдоль трассы. Используя (3.13), (3.20) и (3.21), получаем

$$T(\eta) = \frac{4}{\eta^2} [1 - J_0(\eta)], \quad \eta = v^2 L / g, \quad (3.22)$$

где  $J_0(\eta)$  – функция Бесселя нулевого порядка. Для области частот спектра ПВ параметр  $\eta$  лежит в интервале  $(1.5-96.5) \times 10^2$ , что позволяет упростить (3.17) и (3.22):

$$\begin{aligned} T(\nu) &= \left(\frac{2g}{L}\right)^2 \frac{1}{\nu^4}, \\ G_\Omega(\nu) &= \kappa^2 \left(\frac{2g}{L}\right)^2 \frac{1}{\nu^4} G_\zeta(\nu) \end{aligned} \quad (3.23)$$

– спектр частотных смещений  $G_\Omega(\nu)$  с точностью до множителя  $\kappa^2(2g/L)^2/\nu^4$  воспроизводит спектр флуктуаций ПВ. Максимум спектра (3.23) достигается на частоте  $\nu_{m2} = \sqrt{0.4}(g/\nu) = 0.52$  Гц, так что относительно спектра ПВ (3.19) он смещен в область низких частот. Нормированный спектр частотных смещений  $\hat{G}_\Omega(\nu)$ , (3.23), изображен на рис. 3.6а пунктиром. Ширина спектра на уровне половины от максимума равна  $\delta\nu \approx 0.26$  Гц. Наименьшие отклонения в формах спектров  $\hat{G}_\zeta(\nu)$  и  $\hat{G}_\Omega(\nu)$  наблюдаются для частот  $\nu \leq \nu_{m2}$ , где преобладающее влияние оказывает экспоненциальный множитель в (3.19). При  $\nu > \nu_{m2}$  различие между ними усиливается из-за действия функции преобразования  $T(\nu)$ , обрезающей высокие частоты.

(ii)  $\theta_0 = \pi/2$ , что отвечает расположению трассы по нормали к максимуму углового спектра. Здесь интеграл в (3.13) аналитически не вычисляется и зависимость (1.11) можно получить только численно. На рис. 3.6б пунктиром показан нормированный спектр  $\hat{G}_\Omega(\nu)$  частотных смещений, его ширина  $\delta\nu \approx 0.37$  Гц. Положения максимумов спектров  $\hat{G}_\Omega(\nu)$  на рис. 3.6а и рис. 3.6б практически совпадают, в области значений  $\nu \leq \nu_{m2}$  различие между ними не существенно, а для  $\nu > \nu_{m2}$  расхождение возрастает с увеличением частоты.

Заметим, что для изотропного спектра,  $W_\zeta(\theta) = 1/\pi$ , поведение  $\hat{G}_\Omega(\nu)$  практически неотличимо от зависимости (3.20) для случая  $\theta_0 = \pi/2$ . Это объясняется тем, что функция

$$H(\theta) = \frac{\sin^2(\nu^2 L \cos\theta / 2g)}{(\nu^2 L \cos\theta / 2g)^2}, \quad (3.24)$$

определяющая функцию преобразования  $T(\nu)$  в (3.13), локализована в окрестности угла  $\theta = \pi/2$  (рис. 3.7). Поэтому следует ожидать стирания различий в форме спектра  $\hat{G}_\Omega$  с увеличением угла  $\theta_0$ . Численные расчеты подтверждают данное заключение: это имеет место для значений  $|\theta_0| \geq \theta_l \approx 5^\circ$ . Поэтому можно считать, что для областей углов  $5^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  и  $-90^\circ \leq \theta_0 \leq -5^\circ$  ориентация трассы относительно максимума углового спектра и его вид не существенны. Тогда можно ограничиться угловой зависимостью  $W_\zeta(\theta) = 1/\pi$  и при восстановлении временного спектра ПВ (3.18) пользоваться эталонной функцией преобразования

$$T(\nu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} H(\theta) d\theta. \quad (3.25)$$

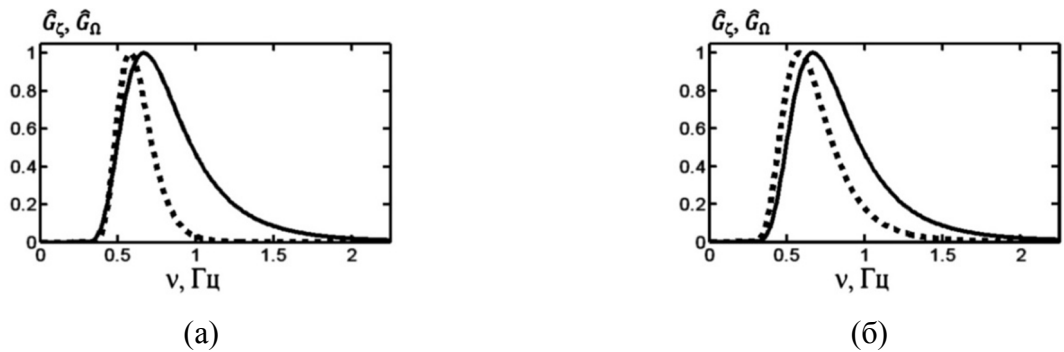
Таким образом, если при возмущении океанической среды ФВВ в качестве эталонной функции преобразования можно принять единицу, то в случае ПВ для широкой области углов  $\theta_0$  эту роль играет зависимость (3.25).

Подставив дисперсионное соотношение (3.21) в условие (3.14), оценим граничную длину трассы  $L_l$ , при которой функция  $T_\zeta(\eta) \approx 1$ . В результате получаем

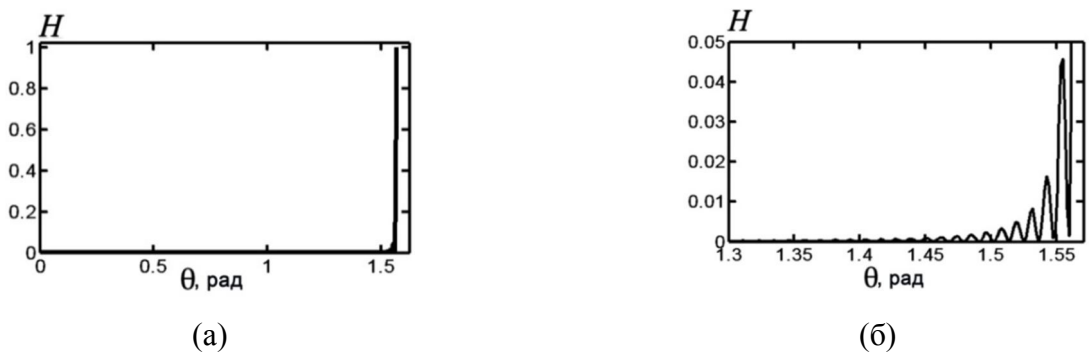
$$L_l = \frac{\pi}{2} \frac{g}{\nu^2 \cos \theta}, \quad (3.26)$$

что дает  $L_l \approx 3.1$  м. Следовательно, при ПВ условие  $T_\zeta(\eta) \approx 1$  практически не реализуемо.

При заданном расположении трассы функция преобразования полностью определяется угловым спектром возмущения  $W_\zeta(\theta)$ , который можно получить как из данных аэрокосмических изображений морской поверхности [65], так и из регистрации пространственного спектра частотных смещений.



**Рис. 3.6.** Нормированные спектры ПВ  $\hat{G}_\zeta(\nu)$  (сплошная линия) и частотных смещений  $\hat{G}_\Omega(\nu, L)$  (пунктир):  $\theta_0 = 0$  (а);  $\theta_0 = \pi/2$  (б).



**Рис. 3.7.** График функции  $H(\theta)$  (3.24): панорама (а); детализация вблизи  $\theta = \pi/2$  ( $\nu = 0.6$  Гц,  $L = 15$  км).

## § 3.5. Заключение

Рассеяние звука на неоднородностях ПВ, как и в случае возмущения среды фоновыми внутренними волнами, не приводит к разрушению локализованной интерференционной картины. Значение интерференционного инварианта не подвергается сильному влиянию, однако точность его определения уменьшается, так как поверхностное волнение ведет к уменьшению контрастности интерференционной картины.

Плодотворность ЧСИМ-мониторинга, если речь идет о восстановлении временных статистических характеристик, ограничена низкочастотными крупномасштабными неоднородностями, такими как фоновые внутренние волны. В случае высокочастотных неоднородностей, например, поверхностных волн, такой подход становится менее эффективным.

Восстановление высокочастотных неоднородностей возможно, если известна функция преобразования спектров, которая полностью определяется угловым распределением возмущения относительно трассы.

## ГЛАВА 4. ЧАСТОТНЫЕ СМЕЩЕНИЯ В ПРИСУТСТВИИ СОЛИТОНА ВНУТРЕННИХ ВОЛН

### § 4.1. Краткое введение

В данной главе рассматривается задача о частотных смещениях интерференционных максимумов звукового поля, вызванных движением солитонов внутренних волн в океанической среде, применительно к маломодовому и многомодовому режиму распространения. При маломодовом режиме звуковое поле формируется несколькими низшими модами (первой и второй), а в многомодовом – всеми распространяющимися модами, включая низшие придонные моды и высшие донно-поверхностные.

Как показано в работе [40], солитон приводит к значительному возмущению волновода, что, в свою очередь, вызывает эффекты межмодовой трансформации.

В параграфе 4.2 на основе данных численного моделирования проанализирована временная динамика частотных смещений, обусловленная внутренним солитоном в случае многомодового режима распространения звукового поля.

В параграфе 4.3 рассматривается задача о частотных смещениях, вызванных солитоном, в случае маломодового режима распространения. Получено и проанализировано аналитическое решение данной задачи. На основе полученных выражений предложен и в рамках численного эксперимента апробирован метод восстановления параметров солитонов по измеренным зависимостям частотных смещений максимумов волнового поля [66].

### § 4.2. Многомодовый режим распространения

Взаимодействие большого количества мод приводит к сложной зависимости интенсивности от частоты. Ниже приведены результаты численного моделирования частотных смещений, вызванных солитоном. Форма солитона – квадрат гиперболического секанса, затухание в дне учитывалось. Амплитуды мод определялись из системы (1.8) с соответствующими коэффициентами взаимодействия мод  $\mu_{mn}$ .

Воспользовавшись выражением для поправки квадрата показателя преломления  $\tilde{n}^2(x, z)$  [28]

$$\tilde{n}^2(x, z) = 2QN^2(z)\bar{\Phi}(z)\zeta(x), \quad (4.1)$$

получаем коэффициенты

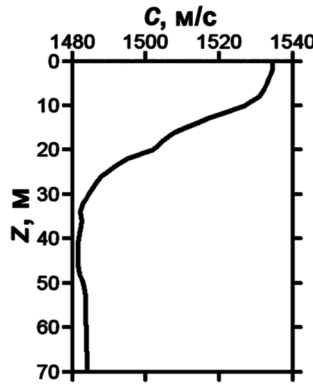
$$\mu_{mn}(x) = q_{mn}\zeta(x), \quad (4.2)$$

где

$$q_{mn} = \frac{Q \bar{k}_0^2}{\sqrt{\bar{h}_m \bar{h}_n}} \int_0^H \bar{\varphi}_m(z) \bar{\varphi}_n(z) N^2(z) \Phi_1(z) dz. \quad (4.3)$$

Здесь  $Q \approx 2.4 \text{ с}^2/\text{м}$  – константа, определяемая физическими свойствами воды;  $N(z)$  – частота плавучести;  $\Phi_1(z)$  – собственная функция первой гравитационной моды, нормированная на значение на глубине приема. Вертикальные смещения водных слоев  $\zeta(x)$ , обусловленные солитоном, определяются решением уравнения Кортевега-де Вриза и имеют вид  $\zeta(x) = A \text{sech}^2(x/\eta)$  [27], где  $A$  и  $\eta$  – амплитуда и полуширина солитона на уровне 0.42 от максимума. Предполагалось, что солитон движется перпендикулярно акустической трассе.

Профиль скорости звука представлен на рис. 4.1. Глубина волновода 70 м, глубина источника и приемника 40 м, длина акустической трассы 12 км. Параметры жидкого дна: отношение плотности грунта к воде 1.8, комплексный показатель преломления  $0.82(1 + i0.0075)$ . Полоса частот сигнала 100-120 Гц. Частотные смещения измерялись прямым методом, положение отслеживаемого максимума в отсутствие возмущения  $\Omega_0 = 113 \text{ Гц}$ . В расчетах учитывались 6 мод.



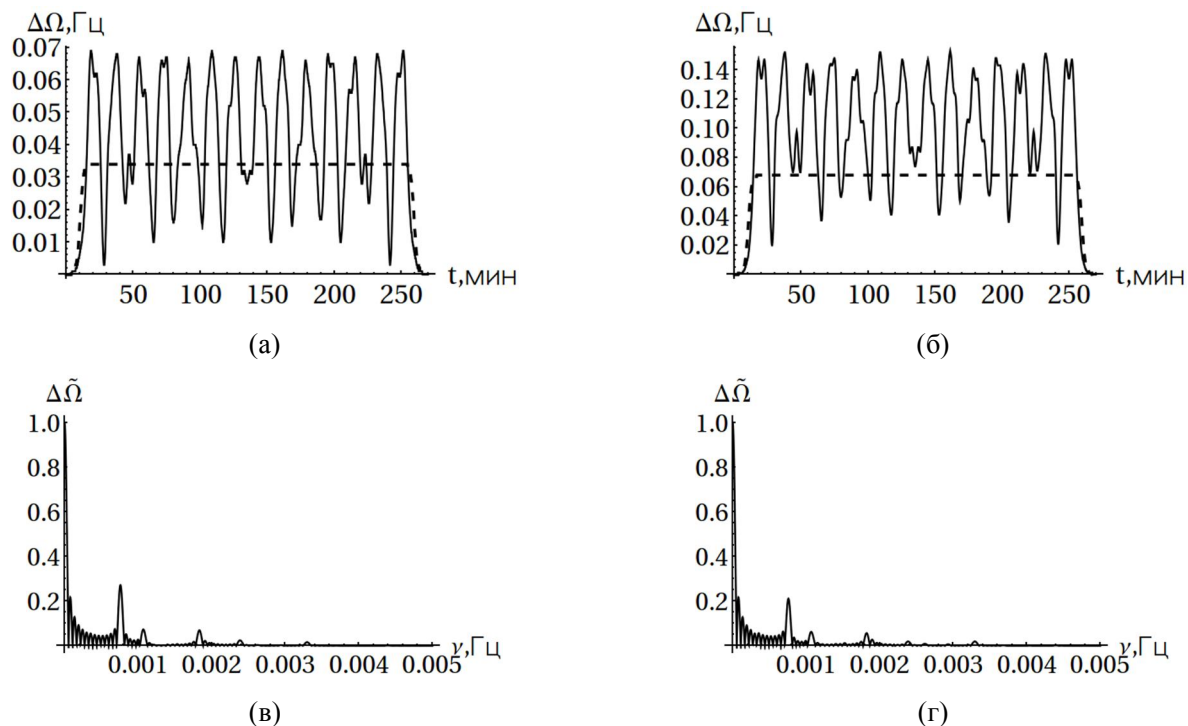
**Рис. 4.1.** Невозмущенный профиль скорости звука  $c(z)$ .

В адиабатическом приближении (рис. 4.2 - 4.4 (а, б), пунктирная линия), когда солитон полностью «зашел» на трассу, частотный сдвиг постоянен, что согласуется с теорией. Спектр частотных смещений  $\Delta\tilde{\Omega}(\nu)$  сосредоточен в малой окрестности частоты  $\nu_0 = 0$ . На графиках спектр, полученный в рамках адиабатического приближения, перекрывается спектром, полученным для случая связанных мод. Ширина спектрального максимума зависит от скорости солитона и длины акустической трассы и не зависит от размеров солитона.

Взаимодействие мод приводит не только к количественному, но и к качественному изменению поведения частотных смещений (рис. 4.2 - 4.4 (а, б), сплошная линия). Обмен



энергией меду модами приводит к тому, что зависимость частотных смещения от времени имеет осциллирующий характер. Период осцилляций зависит от времени прохождения солитонем интервала межмодовых биений, то есть увеличение скорости неоднородности приводит к пропорциональному увеличению частоты осцилляций, не изменяя при этом их среднего значения и амплитуды.

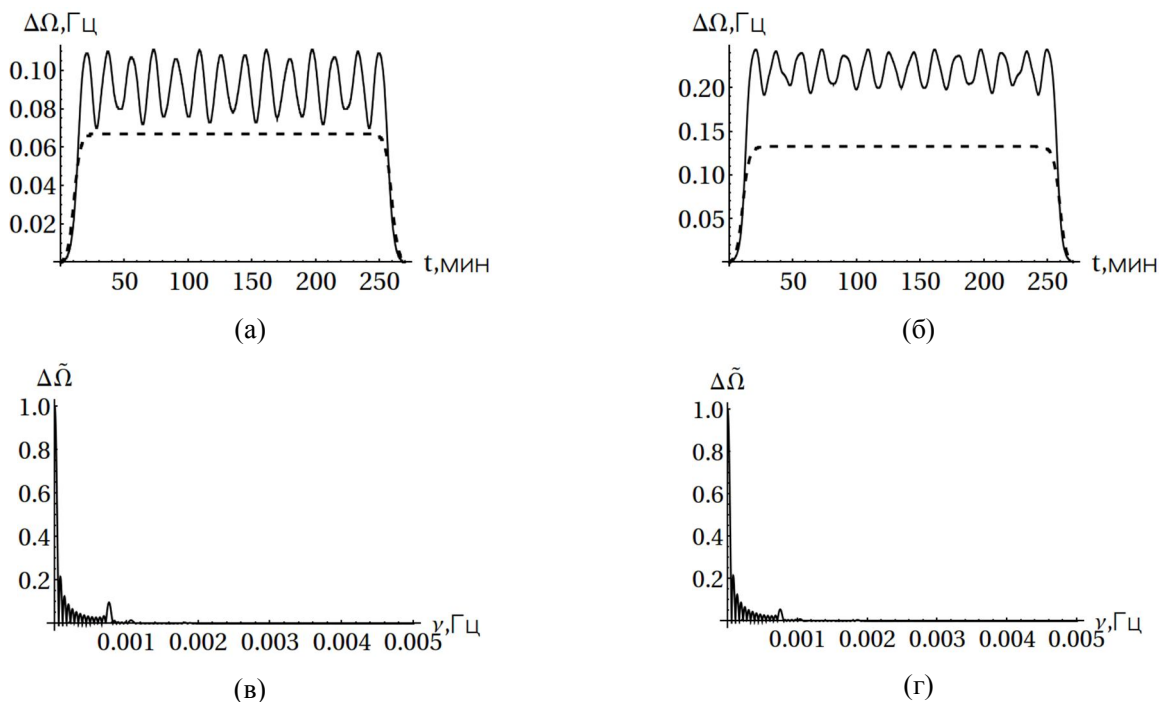


**Рис. 4.2.** Временная зависимость  $\Delta\Omega(t)$  (а, б) и нормированный спектр  $\Delta\tilde{\Omega}(\nu)$  (в, г) частотных смещений. Амплитуда:  $A = 7$  м (а, в),  $A = 14$  м (б, г). Скорость  $v = 0.8$  м/с, размер  $\eta = 120$  м. Пунктир – адиабатика, сплошная линия – взаимодействие мод.

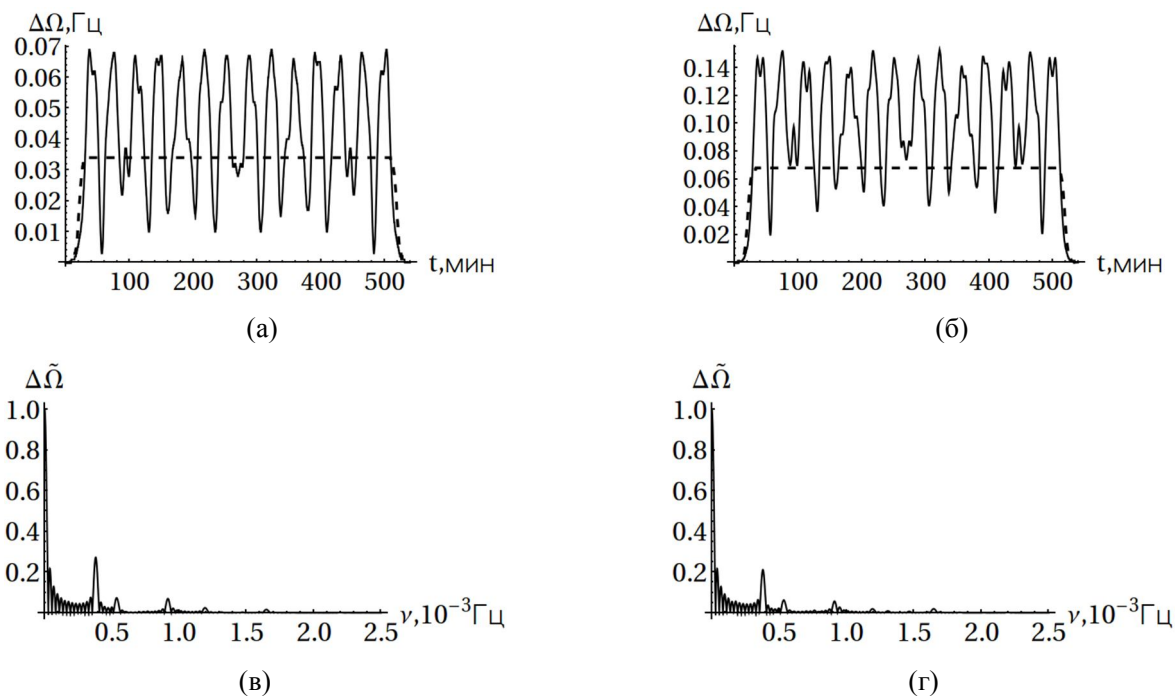
В таблице 4.1 представлены значения частотных смещений, рассчитанные в адиабатическом приближении  $\Delta\Omega_{ad}$ , и усредненное по времени значение  $\Delta\bar{\Omega}$  для случая взаимодействия мод. Из представленных в таблице данных следует, что взаимодействию мод приводит к увеличению среднего значения частотных смещений.

**Таблица 4.1**

$A, \text{ м}$	$\eta, \text{ м}$	Адиабатические моды	Взаимодействующие моды
		$\Delta\Omega_{ad}, \text{ Гц}$	$\Delta\bar{\Omega}, \text{ Гц}$
7	120	0.034	0.041
	240	0.067	0.091
14	120	0.068	0.10
	240	0.13	0.22



**Рис. 4.3.** Временная зависимость  $\Delta\Omega(t)$  (а, б) и нормированный спектр  $\Delta\tilde{\Omega}(\nu)$  (в, г) частотных смещений. Амплитуда:  $A = 7$  м (а, в),  $A = 14$  м (б, г). Скорость  $v = 0.8$  м/с, размер  $\eta = 240$  м. Пунктир – адиабатика, сплошная линия – взаимодействие мод.



**Рис. 4.4.** Временная зависимость  $\Delta\Omega(t)$  (а, б) и нормированный спектр  $\Delta\tilde{\Omega}(\nu)$  (в, г) частотных смещений. Амплитуда:  $A = 7$  м (а, в),  $A = 14$  м (б, г). Скорость  $v = 1.6$  м/с, размер  $\eta = 120$  м. Пунктир – адиабатика, сплошная линия – взаимодействие мод.

Оценка положений побочных спектральных максимумов, которые возникают из-за взаимодействия мод, представлена в [40]. В данной работе показано, что частоты осцилляций определяются временем прохождения солитона интервала межмодовых биений

$$\nu_{mn} \approx v/\bar{\rho}_{mn} \approx \Delta\nu(r/\bar{\rho}_{mn}), \quad (4.4)$$

где  $\bar{\rho}_{mn} = 2\pi/|\bar{h}_{mn}|$  – пространственный период биений мод.

Используя связь  $|\bar{h}_{m(m+1)}| = 2\pi/\bar{D}_m$ , где  $\bar{D}_m$  – длина цикла  $m$ -го модообразующего луча, можно выразить отношение ширины полосы  $\Delta\nu$  к частоте колебаний  $\nu_{m(m+1)}$ , обусловленной взаимодействием соседних мод, в соответствии с (4.4), что дает

$$\Delta\nu/\nu_{m(m+1)} \approx \bar{D}_m/r. \quad (4.5)$$

Соседние спектральные линии  $\nu_{m(m+1)}$  и  $\nu_{(m+1)(m+2)}$  разрешаются, если расстояние между ними превышает ширину спектральной линии, что приводит к условию

$$r > \bar{D}_m \bar{D}_{m+1}/|\bar{D}_{m(m+1)}|, \quad \bar{D}_{m(m+1)} = \bar{D}_m - \bar{D}_{m+1}. \quad (4.6)$$

Следовательно, разрешающая способность спектральных линий не зависит от параметров солитона и полностью определяется длиной трассы и дисперсионной характеристикой невозмущенного волновода. При заданной длине трассы увеличение опорной частоты излучения неизбежно влечет за собой потерю разрешения вследствие возрастания длины цикла луча.

Анализ результатов моделирования показывает, что выражение, описывающее временную изменчивость частотных смещений, может быть записано в виде

$$\Delta\Omega(t) = a + \sum_m^M b_{m(m+1)} \exp(i2\pi\nu_{m(m+1)}t), \quad (4.7)$$

где  $a$  и  $b_{m(m+1)}$  – постоянная составляющая и амплитуда колебаний частотных сдвигов, которые определяются изменениями постоянных распространения, вызванных взаимодействием нормальных волн.

#### § 4.3. Маломодовый режим распространения

Точное решение уравнений (1.8) в общем виде, описывающих взаимодействие мод и связанные с ним эффекты частотных смещений, можно получить только численными методами. Однако хорошего физического понимания проблемы можно достичь, аналитически решая задачу о распространении двух мод с использованием определенных приближений.

Хотя двухмодовый режим распространения представляет собой весьма узкий класс волноводного распространения, решение задачи представляет большой практический интерес. Это связано с тремя моментами. Во-первых, по сравнению с многомодовым режимом, в случае взаимодействия двух мод результаты моделирования частотных смещений физически более прозрачны, так как интерференционная картина не «замазывается» взаимодействием большого числа мод. Во-вторых, полученное решение при определенных условиях допускает обобщение на случай многомодового распространения. В-третьих, за последние годы существенно возрос интерес к маломодовой традиционной импульсной диагностике мелкого моря [54, 67, 68]. Поэтому результаты работы, кроме общезначимого значения, представляют непосредственный интерес для проблемы мониторинга неоднородностей, основанного на информации о частотных смещениях, когда нормальные волны нельзя рассматривать как независимые. Применение различных методов выделения мод, позволяет применять результаты, представленные в данном параграфе, и в случае многомодового режима.

В отсутствие возмущения океанической среды, волновод полагается горизонтально-однородным. Акустическая трасса располагается вдоль оси  $x$ , солитон движется под углом  $\alpha$  к трассе с постоянной скоростью  $v$  (рис. 4.5). Ширина волнового фронта возмущения превышает длину трассы. Анализ частотных смещений проводится в квазистационарном приближении, при котором считается, что рассеяние на неоднородностях происходит так, как если бы они покоились, а временная зависимость для них восстанавливается в окончательном выражении.

Для двух взаимодействующих мод с номерами  $m$  и  $n$  систему уравнений для комплексных амплитуд (1.8) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dC_m(x, \alpha)}{dx} &= i\mu_{mm}(x, \alpha)C_m(x, \alpha) + i\mu_{mn}(x, \alpha)C_n(x, \alpha)\exp(i\bar{h}_{nm}x), \\ \frac{dC_n(x, \alpha)}{dx} &= i\mu_{nn}(x, \alpha)C_n(x, \alpha) + i\mu_{nm}(x, \alpha)C_m(x, \alpha)\exp(i\bar{h}_{mn}x),\end{aligned}\tag{4.8}$$

где  $\bar{h}_m$  – невозмущенное значение действительной части постоянной распространения  $m$ -й моды,  $\bar{h}_{mn} = \bar{h}_m - \bar{h}_n$ ;  $\mu_{mn}$  – коэффициент взаимодействия мод, обусловленный характером неоднородности, который задается выражением (1.9). В правой части уравнений опущено слагаемое, характеризующее затухание  $m$ -й моды, так как для последующего изложения, как показывают численные расчеты (см. ниже рис. 4.6), это не имеет принципиального значения.

Первое и второе уравнения (4.8), согласно (1.9), симметричны по отношению к замене нижних индексов ( $m \leftrightarrow n$ ), поэтому ниже ограничимся рассмотрением лишь первого из них. В случае равенства номеров мод,  $m = n$ , коэффициент  $\mu_{mm}$  равен линейной поправке  $\tilde{h}_m$  к

невозмущенному значению постоянной распространения  $\bar{h}_m$ ,  $\mu_{mm} = \bar{h}_m$  [21]. Если  $m \neq n$ , то  $\mu_{mn} = \mu_{nm}$ .

Для упрощения аналитического рассмотрения примем, что солитон имеет форму прямоугольного импульса

$$\zeta(x) = A \text{rect}(x/\eta) = \begin{cases} A, & |x/\eta| \leq 1, \\ 0, & |x/\eta| > 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Такая замена предполагает равенство импульсов возмущения  $A \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2(x/\eta) dx = A \int_{-\eta}^{\eta} \text{rect}(x/\eta) dx = 2A\eta$  и пренебрежение изменением рассеяния в пределах области неоднородности. Проиллюстрируем состоятельность выбранной теоретической модели на двух примерах численного моделирования частотных смещений. Здесь и ниже моделирование проводилось при следующих исходных данных. Невозмущенное распределение скорости звука по глубине показано на рис. 4.1. Параметры дна: отношение плотности грунта и воды  $\gamma = 1.8$ , комплексный показатель преломления  $0.82(1 + i0.0075)$ . В полосе частот  $\Delta f = 90 - 120$  Гц излучались монохроматические сигналы одинаковой амплитуды с интервалом дискретизации  $\delta f = 0.2$  Гц. Точечные источник и приемник расположены на глубине  $z_0 = 30$  м, горизонтальное расстояние между ними  $r_0 = 10$  км. По умолчанию используется солитон в форме квадрата гиперболического секанса с параметрами: амплитуда  $A = 15$  м, полуширина  $\eta = 100$  м, скорость  $v = 1$  м/с. Рассматривалось взаимодействие между первой и второй модами звукового поля,  $m = 1$ ,  $n = 2$  (наиболее сильное взаимодействие, согласно [40], наблюдается между соседними модами). Для индикации частотных смещений использовалось отслеживание в заданной полосе излучения источника локального максимума интерференционной картины [12], положение которого в отсутствие возмущения приходится на значение  $\Omega_0 = 106.5$  Гц.

На рис. 4.6 приведены результаты расчета частотных смещений для двух форм солитона, движущегося вдоль акустической трассы. Как видно, такая замена формы солитона практически не влияет на средние значения частотных сдвигов и оставляет без изменений положения спектральных линий, однако приводит к увеличению амплитуд спектральных составляющих. Например, на частоте  $\nu = 1.174 \times 10^{-3}$  Гц амплитуда спектра в случае солитона в форме квадрата гиперболического секанса равна  $\widetilde{\Delta\Omega} = 341.94$ , а для прямоугольной формы –  $\widetilde{\Delta\Omega} = 416.38$ . Регистрируется не только стационарная картина интерферограммы частотных смещений, как в случае независимых нормальных волн, но и изменяющийся во времени процесс, обусловленный изменением разности хода модовых лучей

от неоднородности к приемнику. При этом значения постоянного частотного сдвига  $\bar{\Omega}$  в случае взаимодействующих и независимых мод различны. На рис. 4.7 для импульсной формы солитона представлены результаты численного эксперимента частотных смещений при наличии затухания и в его отсутствии. Последний случай реализуется, когда мнимая часть показателя преломления в дне равна нулю. Как следует из рис. 4.7, пренебрежение затуханием приводит к увеличению амплитуды спектральных составляющих, практически не меняя значений других параметров частотных смещений. Так, в отсутствие затухания, на частоте  $\nu = 1.174 \times 10^{-3}$  Гц амплитуда  $\bar{\Delta\Omega} = 577.35$ , что в 1.69 раз превышает значение  $\bar{\Delta\Omega} = 341.94$ . Таким образом, рассматриваемая теоретическая модель солитона (4.9) правомерна и должна приводить к состоятельным оценкам параметров солитона при решении обратной задачи.

Решение системы уравнений (4.8) (само решение приводится ниже) определяет комплексные амплитуды мод  $C_m$  и  $C_n$ , которые запишем как

$$C_m = C_{m0} + \delta C_m, \quad C_n = C_{n0} + \delta C_n, \quad (4.10)$$

где  $C_{m0}$  и  $C_{n0}$  – начальные значения в отсутствии возмущения среды,  $\delta C_m$  и  $\delta C_n$  – приращения, обусловленные возмущением. Для точечного источника, расположенного на глубине  $z_0$ , величины  $C_{m0}$  и  $C_{n0}$  с точностью до константы равны значениям  $\bar{\varphi}_m(z_0)$  и  $\bar{\varphi}_n(z_0)$ . Выражение для фазы  $\theta_m$  комплексной амплитуды  $C_m$  не может быть получено в явном виде для общего случая. Однако для наиболее интересного случая с точки зрения практики, когда относительные приращения амплитуд мод  $\vartheta_m = \delta C_m / C_{m0}$  малы, т.е.  $|\vartheta_m| < 1$ , задача решается в явном виде. Рассмотрим логарифм комплексной амплитуды  $C_m$ . Его вещественная часть представляет собой логарифм амплитуды, а мнимая – приращение фазы. Разлагая логарифм  $C_m$  (4.10) в ряд по степеням малого параметра  $\vartheta_m$ , приращение фазы  $\theta_m$  представим в виде ряда

$$\theta_m = \text{Im}\vartheta_m - (1/2)\text{Im}\vartheta_m^2 + (1/3)\text{Im}\vartheta_m^3 - \dots = \theta_m^{(0)} + \theta_m^{(1)} + \theta_m^{(2)} + \dots \quad (4.11)$$

Первый член  $\theta_m^{(0)}$  ряда (8) определяет линейное приближение приращения фазы, последующие члены  $\theta_m^{(1)}$ ,  $\theta_m^{(2)}$ , ... – высшие (нелинейные) приращения. Частотный сдвиг  $\Omega_{mn}$ , вызванный взаимодействием  $m$ -й и  $n$ -й мод, можно выразить как [12]

$$\Delta\Omega_{mn}(x, \alpha) = -\frac{\theta_{mn}(x, \alpha, \Omega_0)}{\bar{G}_{mn}}, \quad 0 \leq x \leq r_0, \quad (4.12)$$

где  $(\bar{G}_{mn})^{-1} = \{r_0[d\bar{h}_{mn}(\Omega_0)/d\omega]\}^{-1}$  – частотный масштаб изменчивости поля на расстоянии  $r_0$ , вызванный интерференцией мод,  $\Omega_0$  – положение наблюдаемого максимума волнового поля в отсутствие возмущения;  $\theta_{mn} = \theta_m - \theta_n$ . Используя определение для групповой скорости  $m$ -й моды,  $\bar{c}_{gm} = d\omega/d\bar{h}_m$ , коэффициенту  $\bar{G}_{mn}$  можно придать форму:  $\bar{G}_{mn} = \bar{t}_{mn}$ ,

где  $\bar{t}_{mn} = \bar{t}_m - \bar{t}_n$  – разность времен прихода модовых импульсов с номерами  $m$  и  $n$ ,  $\bar{t}_m = r_0/\bar{c}_{gm}$ . Соотношение (4.12) показывает, что измерения изменений фазы, вызванных возмущением, допускают интерпретацию в терминах частотных смещений, т.е. частотному сдвигу  $\Delta\Omega_{mn}$  можно поставить в соответствие изменение фазы  $\theta_{mn} = -\bar{t}_{mn}\Delta\Omega_{mn}$ . Другими словами, измерения частотных смещений, как и измерения фазы, могут быть использованы в интерференции волн для измерительных целей.

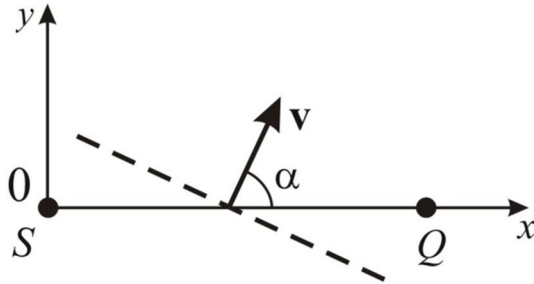


Рис. 4.5. Схема движения солитона вдоль акустической трассы.

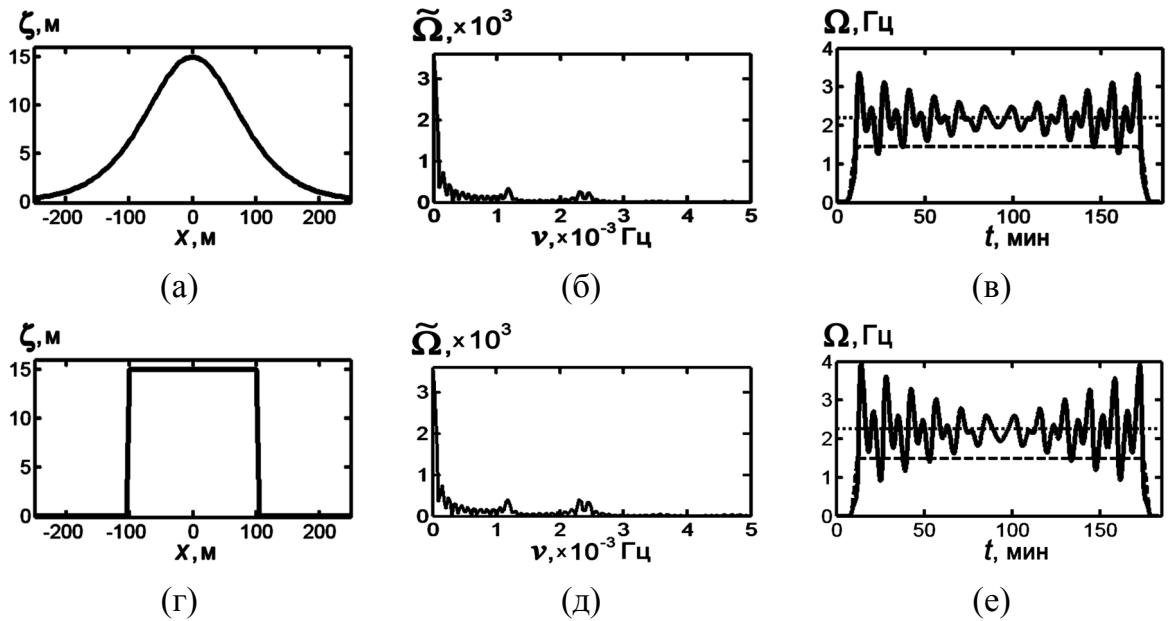
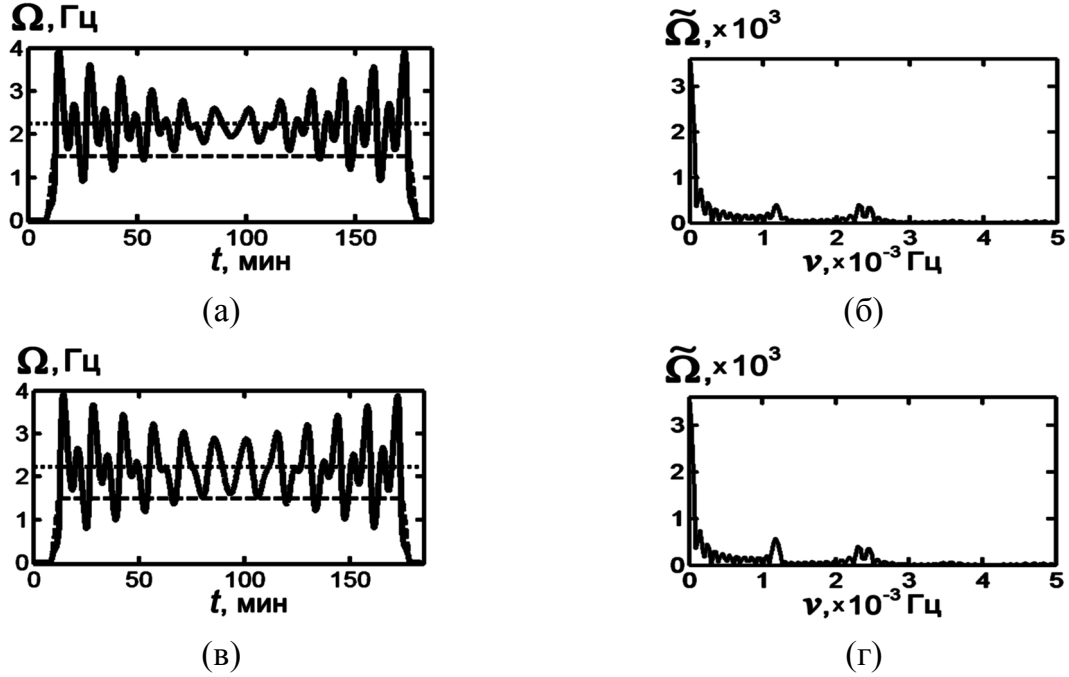


Рис. 4.6. Интерферограммы  $\Delta\Omega(t)$  и спектры  $\Delta\tilde{\Omega}(\nu)$  частотных смещений для двух форм солитона при движении вдоль трассы ( $\alpha = 0^\circ$ ). Параметры солитона: амплитуда  $A = 15$  м, полуширина  $\eta = 100$  м, скорость  $v = 1$  м/с. Штриховая линия – частотные смещения в отсутствие взаимодействия мод, пунктир – среднее значение частотных смещений при взаимодействии мод. (а), (б) и (в) форма солитона – гиперболический секанс. (г), (д) и (е) прямоугольная форма солитона.



**Рис. 4.7.** Интерферограммы  $\Delta\Omega(t)$  и спектры  $\tilde{\Delta\Omega}(\nu)$  частотных смещений для прямоугольной формы солитона при движении вдоль трассы ( $\alpha = 0^\circ$ ) при затухании ((а) и (б)) и в отсутствие затухания ((в) и (г)) звука. Параметры солитона: амплитуда  $A = 15$  м, полуширина  $\eta = 100$  м, скорость  $v = 1$  м/с. Штриховая линия – частотные смещения в отсутствие взаимодействия мод, пунктир – среднее значение частотных смещений при взаимодействии мод.

Решение системы уравнений (4.8) проведем методом итераций, ограничившись вторым приближением, которое для большинства практических приложений обладает достаточной точностью при изучении влияний океанических неоднородностей [24]. При этом ограничимся случаем, когда неоднородность полностью находится на трассе, считая, что волновой фронт возмущения является плоским и его ширина превышает длину трассы.

#### 4.3.1. Движение солитонов вдоль акустической трассы

Случай отвечает значению угла  $\alpha = 0$  (рис. 4.5). Подставим в правую часть первого уравнения (4.8) вместо амплитуд  $C_m, C_n$  их начальные значения  $C_{m0}, C_{n0}$  и проинтегрируем

$$C_m(x) = C_{m0} + i\{C_{m0} \int_0^x \mu_{mm}(x') dx' + C_{n0} \int_0^x \mu_{mn}(x') \exp(i\bar{h}_{nm}x') dx'\}. \quad (4.13)$$

Выполняя вторую итерацию, получаем

$$C_m(x) = C_{m0} + \{-[C_{m0} \int_0^x \int_0^s \mu_{mm}(s) \mu_{mm}(\sigma) d\sigma ds + C_{n0} \int_0^x \int_0^s \mu_{mm}(s) \mu_{mn}(\sigma) \exp(i\bar{h}_{nm}\sigma) d\sigma ds +$$



$$\begin{aligned}
& + C_{n0} \int_0^x \int_0^s \mu_{mn}(s) \exp(i\bar{h}_{nm}s) \mu_{nn}(\sigma) d\sigma ds + \\
& + C_{m0} \int_0^x \int_0^s \mu_{mn}(s) \exp(i\bar{h}_{nm}s) \mu_{nm}(\sigma) \exp(i\bar{h}_{mn}\sigma) d\sigma ds + \\
& + i[C_{m0} \int_0^x \mu_{mm}(s) ds + C_{n0} \int_0^x \mu_{mn}(s) \exp(i\bar{h}_{nm}s) ds] \}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Как видно, решение первого порядка по сравнению со вторым дает заниженную оценку для приращения комплексной амплитуды  $\delta C_m$ , выделенной в (4.13) и (4.14) фигурными скобками. Для нахождения комплексной амплитуды  $C_n$  достаточно в (4.13) и (4.14) провести замену нижних индексов:  $m \rightarrow n$ .

Используя (4.10) и (4.14), выделим приращение  $\vartheta_m$  и подставим в выражение (4.11), ограничиваясь первыми двумя слагаемыми. Если теперь воспользоваться соотношениями (4.2) – (4.9), то в результате интегрирования получим выражение для приращения фазы  $\theta_m$ . Определим аналогичным образом приращение фазы  $\theta_n$ . Тогда с точностью до квадратичных членов выражение для разности фаз  $\theta_{mn}$ , переходя к временной зависимости подстановкой  $x = vt$ , можно привести к виду

$$\theta_{mn}(t) = \bar{\theta}_{mn} + \tilde{\theta}_{mn}(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad t_1 = 2\eta/v, \quad t_2 = (r_0 - 2\eta)/v, \tag{4.15}$$

где

$$\bar{\theta}_{mn} = J_1 + J_2 + J_3 \tag{4.16}$$

– постоянная составляющая разности фаз;

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_{mn}(t) = & I_1 \cos(\omega_{mn}t + \varphi_{mn}) + I_2 \sin(\omega_{mn}t) + I_3 \sin(\omega_{mn}t + \varphi_{mn}) + \\
& + I_4 \sin(\omega_{mn}t + 2\varphi_{mn}) + I_5 \cos(2\omega_{mn}t + 2\varphi_{mn}) + I_6 \sin(2\omega_{mn}t + \varphi_{mn}) + \\
& + I_7 \sin(2\omega_{mn}t + 3\varphi_{mn}) + I_8 \cos(3\omega_{mn}t + 3\varphi_{mn})
\end{aligned} \tag{4.17}$$

– изменяющаяся составляющая разности фаз. Здесь величины  $J_j$  и  $I_i$  означают следующее

$$\begin{aligned}
J_1 = & 2A\eta(q_{mm} - q_{nn}), \quad J_2 = 4(A\eta)^3(q_{mm}^3 - q_{nn}^3), \\
J_3 = & 2(A\eta)^3 q_{mn}^2 \frac{\sin^2 \varphi_{mn}}{\varphi_{mn}^2} \left\{ (q_{mm} - q_{nn}) + \left[ q_{mm} \left( \frac{C_{n0}}{C_{m0}} \right)^2 - q_{nn} \left( \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right)^2 \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
I_1 = & \left\{ 2A\eta q_{mn} \frac{\sin \varphi_{mn}}{\varphi_{mn}} \left[ \left( \frac{C_{n0}}{C_{m0}} - \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right) + 2(A\eta)^2 \left( q_{mm}^2 \frac{C_{n0}}{C_{m0}} - q_{nn}^2 \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right) \right] + \right. \\
& \left. + 3(A\eta q_{mn})^3 \frac{\sin^3 \varphi_{mn}}{\varphi_{mn}^3} \left( \frac{C_{n0}}{C_{m0}} - \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{2A^3\eta^2 q_{mn}^2 \sin\varphi_{mn}}{|\bar{h}_{mn}| \varphi_{mn}} \left[ q_{mm} \left( \frac{C_{n0}}{C_{m0}} \right)^2 - q_{nn} \left( \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right)^2 \right] - \frac{4A^3\eta^2 q_{mn}}{|\bar{h}_{mn}|} \left[ q_{mm}^2 \frac{C_{n0}}{C_{m0}} - q_{nn}^2 \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right],$$

$$I_3 = \frac{4A^3\eta^2 q_{mn}}{|\bar{h}_{mn}|} \frac{\sin\varphi_{mn}}{\varphi_{mn}} \left[ \left( q_{mm}^2 \frac{C_{n0}}{C_{m0}} - q_{nn}^2 \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right) - q_{mm} q_{nn} \left( \frac{C_{n0}}{C_{m0}} - \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right) \right],$$

(4.19)

$$I_4 = \frac{4A^3\eta^2 q_{mm} q_{nn} q_{mn}}{|\bar{h}_{mn}|} \left( \frac{C_{n0}}{C_{m0}} - \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right), \quad I_5 = 2(A\eta)^3 q_{mn}^2 (q_{mm} - q_{nn}) \frac{\sin^2\varphi_{mn}}{\varphi_{mn}^2},$$

$$I_6 = -\frac{2A^3\eta^2 q_{mn}^2 \sin\varphi_{mn}}{|\bar{h}_{mn}| \varphi_{mn}} \left[ q_{mm} \left( \frac{C_{n0}}{C_{m0}} \right)^2 - q_{nn} \left( \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right)^2 \right],$$

$$I_7 = \frac{2A^3\eta^2 q_{mn}^2 \sin\varphi_{mn}}{|\bar{h}_{mn}| \varphi_{mn}} \left[ q_{mm} \left( \frac{C_{n0}}{C_{m0}} \right)^2 - q_{nn} \left( \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right)^2 \right],$$

$$I_8 = (A\eta q_{mn})^3 \frac{\sin^3\varphi_{mn}}{\varphi_{mn}^3} \left( \frac{C_{n0}}{C_{m0}} - \frac{C_{m0}}{C_{n0}} \right),$$

где  $\varphi_{mn} = |\bar{h}_{mn}|\eta$  – фаза колебаний;  $\omega_{mn} = 2\pi\nu_{mn}$ ,  $\nu_{mn} = |\bar{h}_{mn}|v/2\pi$  – первая гармоника осцилляций взаимодействующих  $m$ -й и  $n$ -й мод. Используя определение для пространственного периода биений мод,  $\bar{\rho}_{mn} = 2\pi/\bar{h}_{mn}$ , частоте  $\nu_{mn}$  можно придать вид:  $\nu_{mn} = v/\bar{\rho}_{mn}$ . Величину  $1/\nu_{mn}$  можно интерпретировать как характерное время  $\bar{\rho}_{mn}/v$  перемещения интерференционной картины. Изменение скорости неоднородности приводит к пропорциональному изменению частоты колебаний  $\nu_{mn}$ , не изменяя их амплитуду.

В соотношении (4.16) первое слагаемое определяет постоянный частотный сдвиг в приближении независимых нормальных волн (линейный член разложения (4.11)), два остальных – результат взаимодействия мод (квадратичный член (4.11)). В соотношении (4.17) первое слагаемое в первом члене определяется линейным приближением фазы (4.11), остальные – квадратичным приближением, что обуславливает появление гармоник  $2\omega_{mn}$  и  $3\omega_{mn}$ . Таким образом, взаимодействие мод приводит, по сравнению со случаем независимых нормальных волн, как к изменению среднего значения разности фазы  $\bar{\theta}$  между интерферирующими модами, так и к появлению гармоник разности фазы  $\tilde{\theta}$ . Качественно эти два механизма различаются тем, что среднее значение разности фаз определяется главным образом параметрами  $q_{mm}$  и  $q_{nn}$ , обусловленными поправками к невозмущенным значениям постоянных распространения, в то время как в величине осцилляций фазы представлены как параметры  $q_{mm}$ ,  $q_{nn}$ , так и параметр  $q_{mn}$ , определяющий взаимодействие мод.

Выражения для коэффициентов  $J_j$  (4.18) и  $I_i$  (4.19) получены в приближении  $|\vartheta_{m,n}| < 1$ . Для выполнения этого условия необходимо потребовать равенство амплитуд  $C_{m0}$  и  $C_{n0}$  по порядку величины,  $C_{m0} \sim C_{n0}$ . Если одна из мод по сравнению с другой возбуждается слабо, например  $C_{m0} \gg C_{n0}$ , то при  $C_{n0} \rightarrow 0$  отношение  $C_{m0}/C_{n0}$  неограниченно возрастает и приближение малого параметра  $\vartheta_n$  нарушается. В этом случае систему уравнений (4.8) следует решать при начальных условиях, полагая  $C_{n0} = 0$ .

Согласно (4.12), (4.15) частотный сдвиг равен

$$\Delta\Omega(t) = -\frac{1}{G_{mn}}(\bar{\theta}_{mn} + \tilde{\theta}_{mn}) = \bar{\Delta\Omega} + \widetilde{\Delta\Omega}(t). \quad (4.20)$$

Решение задачи, как видно из (4.15), (4.17) и (4.20), не описывает модуляцию частотных смещений, наблюдающуюся в численном эксперименте (рис. 4.6 и рис. 4.7). Такое различие обусловлено приближенным характером выражения (4.12), в основе получения которого лежит линейное разложение постоянной распространения  $h_m$  в ряд Тейлора для опорного значения  $\Omega_0$  — положения максимума поля в отсутствие возмущения. При стационарной картине частотных смещений ограничение линейным членом разложения является допустимым, так как малые изменения постоянных распространения незначительно влияют на среднее значение. Однако при нестационарной картине отклонения положений максимумов  $\Omega(t)$  от опорного значения  $\Omega_0$  не описываются линейным соотношением. В результате возникают биения, что приводит к частотной модуляции.

Рассмотрим теперь спектр интерферограмм частотных смещений, который также исчерпывающим образом отражает сущность явления. Амплитуды спектральных составляющих  $p\nu_{mn}$ ,  $p = 1, 2, 3$ , как видно из данных моделирования (рис. 4.6 и рис. 4.7), уменьшаются с увеличением номера гармоники  $p$  и существенно меньше спектральной амплитуды частотных смещений на частоте  $\nu_{mn} = 0$ . При этом спектральная составляющая  $3\nu_{mn}$  в силу малости амплитуды на рисунках не видна. Далее ограничимся рассмотрением постоянной составляющей  $\bar{\Delta\Omega}$  и первой гармоники  $\omega_{mn}$  частотных смещений (4.20).

Для рассматриваемого невозмущенного модельного волновода параметры, определяющие значения коэффициентов  $J_j$ ,  $I_i$ , и значение величины  $G_{12}$  приведены в табл. 4.2. Напомним, что моделировалось распространение первой ( $m = 1$ ) и второй ( $n = 2$ ) моды. Как следует из данных в табл. 4.2, слагаемым  $J_3$  (4.18) при определении постоянной составляющей  $\bar{\Omega}_{mn}$  (4.16) можно пренебречь. Если теперь воспользоваться обратным преобразованием Фурье

$$\widetilde{\Delta\Omega}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\Omega(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (4.21)$$

то, пренебрегая краевыми эффектами, связанными с неполным выходом или уходом солитона с трассы, для амплитуды спектральных составляющих на частотах  $\omega = 0$  и  $\omega = \omega_{mn}$  нетрудно получить

$$\widetilde{\Delta\Omega}(0) = \frac{1}{2\pi} \frac{T}{G_{mn}} J, \quad J = J_1 + J_1, \quad (4.22)$$

$$\widetilde{\Delta\Omega}(\omega = \omega_{mn}) = \frac{1}{4\pi} \frac{T}{G_{mn}} I, \quad (4.23)$$

где

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + 2I_3(I_2 + I_4)\cos\varphi_{mn} + 2I_1(I_4 - I_2)\sin\varphi_{mn} + 2I_2I_4\cos 2\varphi_{mn}} \quad (4.24)$$

– амплитуда гармоники разности фаз;  $T = r_0/v$  – время прохождения солитоном трассы. Заметим, что выражение (4.22) остается справедливым и при учете краевых эффектов, если импульс считать трапецией. При этом ширина размытия спектральных линий на уровне 0.7 от максимума оценивается как

$$\delta\nu = 0.9 \frac{v}{r_0}, \quad (4.25)$$

т.е. она с точностью до множителя 0.9 обратно пропорциональна времени  $T$  и не зависит от номеров взаимодействующих мод. Заметим, что выражения для частоты осцилляций  $\nu_{mn}$  и ширины спектральной линии  $\Delta\nu$  ранее были получены на основе данных численного эксперимента [40].

**Таблица 4.2** Параметры невозмущенного волновода

$\bar{h}_{mn}, \times 10^{-3}$ м <sup>-1</sup>	$C_{0m}$	$C_{0n}$	$q_{mm}, \times 10^{-4}$ м <sup>-2</sup>	$q_{nn}, \times 10^{-4}$ м <sup>-2</sup>	$q_{mn}, \times 10^{-4}$ м <sup>-2</sup>	$G_{mn},$ с
7.590	0.1352	0.1577	1.2860	2.8095	2.0070	0.3391

#### 4.3.2. Движение солитонов под углом к акустической трассе

Пересечение солитоном трассы под углами  $\alpha$  (рис. 4.5),  $0 < \alpha < \pi/2$ , как следует из геометрических представлений, сводится к случаю движения вдоль трассы, если бы он имел эффективные полуширину  $\eta(\alpha) = \eta/\cos\alpha$  и скорость  $v(\alpha) = v/\cos\alpha$ , что отвечает времени пересечения трассы волновым фронтом возмущения  $T(\alpha) = T\cos\alpha$ . Здесь  $\eta, v, T$  – значения величин при угле  $\alpha = 0$ . В этом случае выражения (4.15) сохраняются, если в них учесть соответствующие замены. Динамика частотных смещений в окрестности угла  $\pi/2$ , когда

волновой фронт возмущения вытягивается вдоль трассы, в рамках численного моделирования рассмотрена в [69, 70]. Увеличение угла  $\alpha$ , согласно (4.16) и (4.18), очевидно приводит к возрастанию среднего значения частотного сдвига  $\overline{\Delta\Omega}$  и частотного сдвига  $\Delta\Omega_{ad}$ , вычисляемого в адиабатическом приближении, а также к уменьшению амплитуды спектральной составляющей (4.23), что, правда, не так очевидно, но подтверждается численными расчетами. Частота  $\nu_{mn}(\alpha)$  и ширина  $\delta\nu(\alpha)$  спектральных линий соответственно равны

$$\nu_{mn}(\alpha) = \nu_{mn}/\cos\alpha, \quad \delta\nu(\alpha) = \delta\nu/\cos\alpha, \quad (4.26)$$

так что возрастание угла  $\alpha$  влечет за собой увеличение этих величин пропорционально множителю  $(1/\cos\alpha)$ . При этом, согласно (2.25), отношение ширины  $\delta\nu(\alpha)$  к частоте колебаний  $\nu_{mn}(\alpha)$  можно привести к виду

$$\delta\nu(\alpha)/\nu_{mn}(\alpha) = 0.9 \cdot 2\pi(|\bar{h}_{mn}|r_0)^{-1}, \quad (4.27)$$

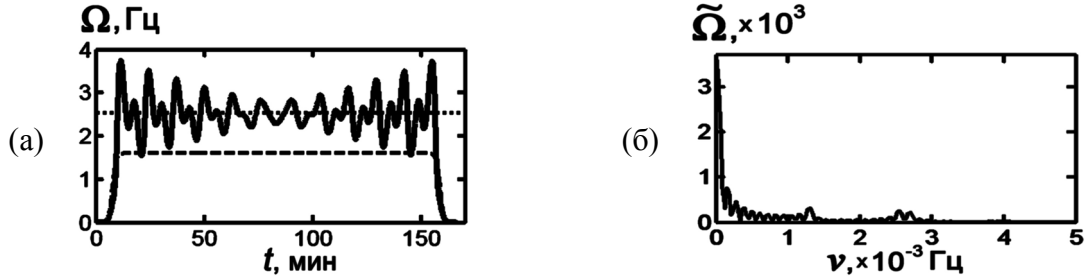
не зависящему от возмущения. Далее зависимость от угла  $\alpha$  у соответствующих величин опускается, если это не вызывает сомнений.

На рис. 4.8 - 4.10 приведены результаты моделирования частотных смещений для значений угла  $\alpha = 25^\circ, 50^\circ, 75^\circ$ . Как видно из рис. 4.6 (а, б) и рис. 4.8 - 4.10, увеличение угла  $\alpha$  приводит к возрастанию постоянной составляющей  $\bar{\theta}_{mn}$ , уменьшению амплитуды спектральной составляющей на частоте  $\nu_{mn}$  и возрастанию значений  $\nu_{mn}$ ,  $\delta\nu$ , что качественно согласуется с представленной теорией. При угле  $\alpha = 75^\circ$  осцилляции частотных смещений практически исчезают, амплитуда спектральной линии не регистрируется на фоне спектра постоянной составляющей частотных смещений. При этом, однако, различия между значениями частотных смещений  $\Delta\Omega_{ad}$  и  $\Delta\bar{\Omega}$  с ростом угла  $\alpha$  возрастают. Количественное сопоставление результатов моделирования и теории для различных углов приведено в табл.

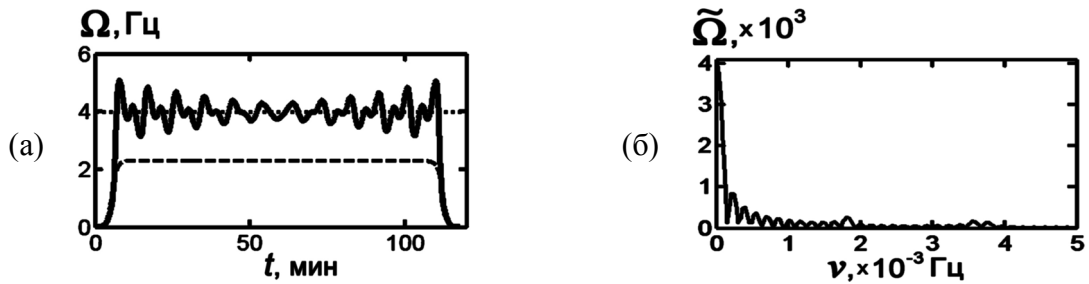
Таблица 4.3. Из этих данных следует, что заметное расхождение между ними начинает проявляться для значений углов  $\alpha \geq 50^\circ$ , что связано с ограничением в разложении (4.11) двух слагаемых, используемых при построении теории. Для уменьшения различия с увеличением угла следует учитывать высшие приближения, что существенно усложняет решение обратной задачи. Однако это не имеет физического смысла, так как предложенная теория не учитывает горизонтальную рефракцию нормальных волн [71-73], проявление которой для рассматриваемой модельной задачи возможно для углов  $\alpha > 70^\circ$ . Можно считать, что применимость используемого приближения (4.11) ограничена областью углов  $\alpha \leq 50^\circ$ .

Отметим, что в тесной связи с осцилляциями частотных смещений находятся осцилляции интенсивности звукового поля. В работах [74-77] теоретически и экспериментально показано,

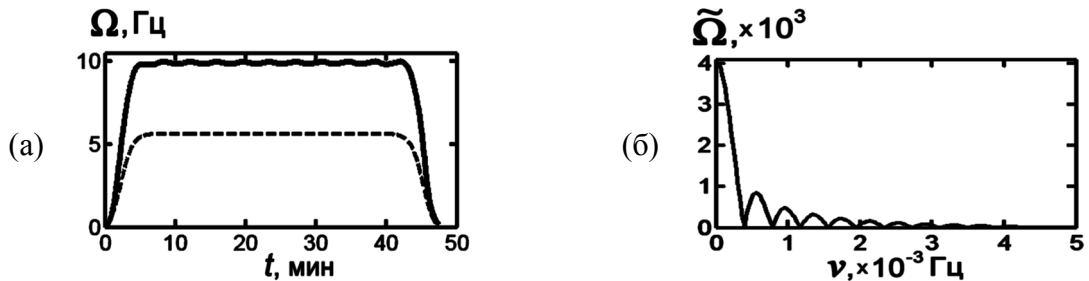
что в присутствии интенсивных нелинейных внутренних волн наблюдаются квазигармонические изменения интенсивности с частотой  $\nu_{mn}$ .



**Рис. 4.8.** Зависимость  $\Delta\Omega(t)$  (а) и спектр частотных смещений  $\tilde{\Delta\Omega}(\nu)$  (б) при движении солитона под углом  $\alpha = 25^\circ$  к трассе. Пунктир – частотные смещения в отсутствие взаимодействия мод, штрих-пунктир – среднее значение частотных смещений при взаимодействии мод.



**Рис. 4.9.** Зависимость  $\Delta\Omega(t)$  (а) и спектр частотных смещений  $\tilde{\Delta\Omega}(\nu)$  (б) при движении солитона под углом  $\alpha = 50^\circ$  к трассе. Пунктир – частотные смещения в отсутствие взаимодействия мод, штрих-пунктир – среднее значение частотных смещений при взаимодействии мод.



**Рис. 4.10** Зависимость  $\Delta\Omega(t)$  (а) и спектр частотных смещений  $\tilde{\Delta\Omega}(\nu)$  (б) при движении солитона под углом  $\alpha = 75^\circ$  к трассе. Пунктир – частотные смещения в отсутствие взаимодействия мод, штрих-пунктир – среднее значение частотных смещений при взаимодействии мод.

Таблица 4.3.

$\alpha$ , град	Характер вычислений	$\Omega_{ad}$ , Гц	$\Delta\bar{\Omega}$ , Гц	$\nu_{mn}$ , $\times 10^{-3}$ Гц	$\delta\nu$ , $\times 10^{-4}$ Гц
0	теория	1.348	2.146	1.209	0.899
	моделирование	1.452	2.188	1.174	0.909
25	теория	1.487	2.559	1.333	0.992
	моделирование	1.602	2.524	1.295	1.018
50	теория	2.097	5.102	1.880	1.556
	моделирование	2.286	3.981	1.810	1.363
75	теория	5.207	20.599	—	—
	моделирование	5.531	9.737	—	—

Рассмотрим вопрос о применимости адиабатического приближения к описанию частотных смещений, вызванных солитонами при маломодовом режиме распространения. Исходя из выполненного рассмотрения, можно сформулировать следующие два критерия, согласно которым нормальные волны можно считать независимыми:

- I. Амплитуда гармонических колебаний не различима на фоне спектра постоянной составляющей.
- II. Постоянная составляющая не должна заметно отличаться от значения, получаемого в условиях адиабатического приближения.

Согласно критерию I должно выполняться условие

$$J \frac{\sin(\omega_{mn}T/2)}{(\omega_{mn}T/2)} \geq \frac{1}{2}, \quad (4.28)$$

для применимости которого, как свидетельствуют численные расчеты, достаточно потребовать удовлетворения неравенства

$$\sin\varphi_{mn}/\varphi_{mn} \ll 1. \quad (4.29)$$

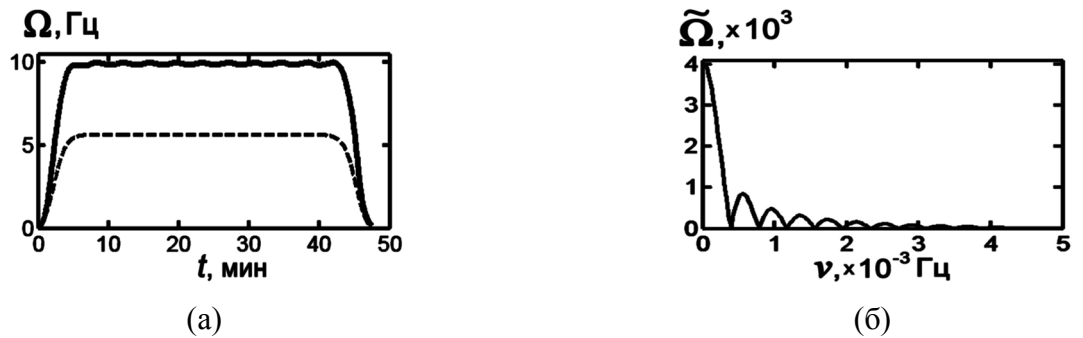
Полагая, что неравенства типа (4.29) реализуются, если левая и правая части различаются не менее чем на порядок, приходим к оценке угла  $\alpha_0 = \arccos |\bar{h}_{mn}|/\eta/2.86$ , что дает  $\alpha_0 \approx 74^\circ 36'$ . В этом случае эффективный размер неоднородности сопоставим с периодом межмодовых биений,  $2\eta/\cos\alpha_0 \approx 0.91\bar{\rho}_{mn}$ . Полученная оценка согласуется со значением

$\alpha = 75^\circ$ , при котором по данным моделирования осцилляциями частотных смещений можно пренебречь (рис. 4.9). Функция  $\sin\varphi_{mn}/\varphi_{mn}$  является осциллирующей, поэтому при углах  $\alpha > \alpha_0$  условие (4.28) может нарушаться, и колебания частотных смещений снова могут становиться заметными. Для определения области углов  $\alpha \geq \alpha_b$ , в которой условие (4.28) всегда выполняется, следует неравенство (4.29) заменить более сильным неравенством  $\varphi_{mn} \gg 1$ . Тогда для граничного угла  $\alpha_b$  получаем оценку  $\alpha_b = \arccos(|\bar{h}_{mn}|\eta/10)$ , что дает  $\alpha_b \approx 85^\circ 42'$ . В этом случае эффективный размер неоднородности удовлетворяет условию  $2\eta/\cos\alpha \geq 3.18\bar{\rho}_{mn}$ . Полученная оценка для эффективного размера неоднородности совпадает с традиционным критерием применимости адиабатического приближения [24], если принять во внимание, что при его формулировке, опуская множитель  $2\pi$ , полагается  $|\bar{h}|_{mn} \sim 1/\bar{\rho}_{mn}$ .

Что касается критерия II, то его можно формализовать, пренебрегая слагаемым  $J_3$  в (4.16), в виде неравенства

$$(A\eta/\cos\alpha)^2(q_{mm}^2 + q_{mm}q_{nn} + q_{nn}^2) \ll 1. \quad (4.30)$$

Полагая  $\eta = 100$  м,  $\alpha = 75^\circ$ , для области допустимых значений амплитуд  $A$  получаем условие  $A \leq A_b$ , где граничное значение  $A_b \approx \sqrt{5}$  м. На рис. 4.11 приведена интерферограмма частотных смещений для параметров солитона  $A = 2$  м,  $\eta = 100$  м,  $\alpha = 75^\circ$ . Как видно из представленных зависимостей, значения  $\Delta\Omega_{ad}$  и  $\bar{\Delta\Omega}$  близки между собой. Отметим, что неравенство (4.30) ранее в работах не рассматривалось, так как считалось достаточным выполнения одного первого критерия. Как показывает более детальный анализ решения уравнений для взаимодействующих мод, это не так.



**Рис. 4.11.** Зависимость  $\Delta\Omega(t)$  (а) и спектр частотных смещений  $\tilde{\Delta\Omega}(\nu)$  (б) при движении солитона под углом  $\alpha = 75^\circ$  к трассе. Пунктир – частотные смещения в отсутствие взаимодействия мод, штрих-пунктир – среднее значение частотных смещений при взаимодействии мод.



Таким образом, традиционный критерий независимости нормальных волн, выражающийся в отсутствии колебаний интерференционной картины, должен быть дополнен критерием равенства среднего значения разности фаз между интерферирующими модами, получаемого при учете взаимодействия мод и использовании адиабатического приближения. Применительно к рассматриваемому модельному волноводу адиабатическое приближение может быть реализовано в узкой области углов, когда начинает проявляться горизонтальная рефракция акустических волн, и при малых значениях амплитуд солитонов.

#### 4.3.3. Восстановление характеристик солитона

Выполненное теоретическое рассмотрение показывает возможность решения обратной задачи на основе информации о частотных смещениях в условиях связанных нормальных волн, что ранее ставилось под сомнение. Проиллюстрируем сказанное на примере численного эксперимента, схема которого представлена на рис. 4.12. Две акустические трассы, имеющие общий источник  $S$  и разнесенные приемники  $Q_1$  и  $Q_2$ , располагаются под углом  $\beta = 20^\circ$  друг к другу и имеют протяженность  $r_0 = 10$  км. Параметры невозмущенного волновода, приведенные в табл. 4.2, как и геометрия задачи, считаются известными. Солитон пересекает трассы под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Моделирование осуществляется при следующих параметрах солитона: амплитуда  $A = 15$  м, полуширина  $\eta = 100$  м, скорость  $v = 1$  м/с, углы  $\alpha_1 = 40^\circ$  и  $\alpha_2 = 20^\circ$ . Требуется по данным численного эксперимента – частотным смещениям, приведенным на рис. 4.13а, 4.13б (первая трасса) и рис. 4.13в, 4.13г (вторая трасса), – восстановить параметры солитона и направление его перемещения.

Параметры частотных смещений, регистрируемые в численном эксперименте, приведены в табл. 4.4. Алгоритм решения обратной задачи заключается в следующем. Измерение частот колебаний  $v_{12}(\alpha_1)$ ,  $v_{12}(\alpha_2)$  на двух трассах, учитывая связь между углами  $\alpha_1 = \beta + \alpha_2$ , дает уравнение для нахождения угла  $\alpha_2$

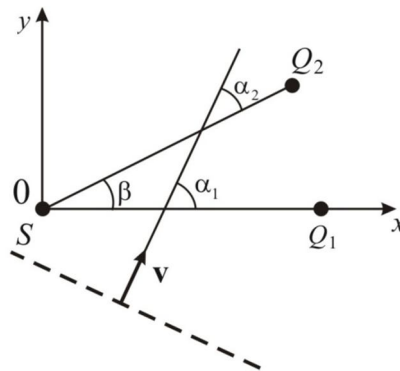
$$\operatorname{tg} \alpha_2 = (\gamma \cos \beta - 1) / \gamma \sin \beta, \quad (4.31)$$

где  $\gamma = v_{12}(\alpha_1) / v_{12}(\alpha_2)$ . В силу (4.25) скорость солитона можно оценить по измерениям ширины спектральной линии на второй трассе как  $v = 1.11 r_0 \delta v(\alpha_2) \cos \alpha_2$ . Определение импульса солитона  $A\eta$  по измерениям среднего значения частотного сдвига  $\overline{\Delta\Omega}(\alpha_2)$  на второй трассе сводится к решению кубического уравнения

$$\overline{\Delta\Omega}(\alpha_2) = -\frac{1}{G_{12}} \left[ \frac{2A\eta}{\cos \alpha_2} (q_{11} - q_{22}) + 4 \frac{(A\eta)^3}{\cos^3 \alpha_2} (q_{11}^3 - q_{22}^3) \right]. \quad (4.32)$$

Выражение (4.27) определяет разность постоянных распространения  $|\bar{h}_{12}|$  невозмущенного волновода, что позволяет контролировать возможные отклонения параметров среды от

принятой модели во время проведения эксперимента. Для “расщепления” сомножителей в величине  $A\eta$  можно воспользоваться выражением (4.23), измерив амплитуду спектральной линии на частоте  $\nu_{12}(\alpha_2)$ , однако мы этого делать не будем. Результаты восстановления характеристик солитона приведены в табл. 4.5.



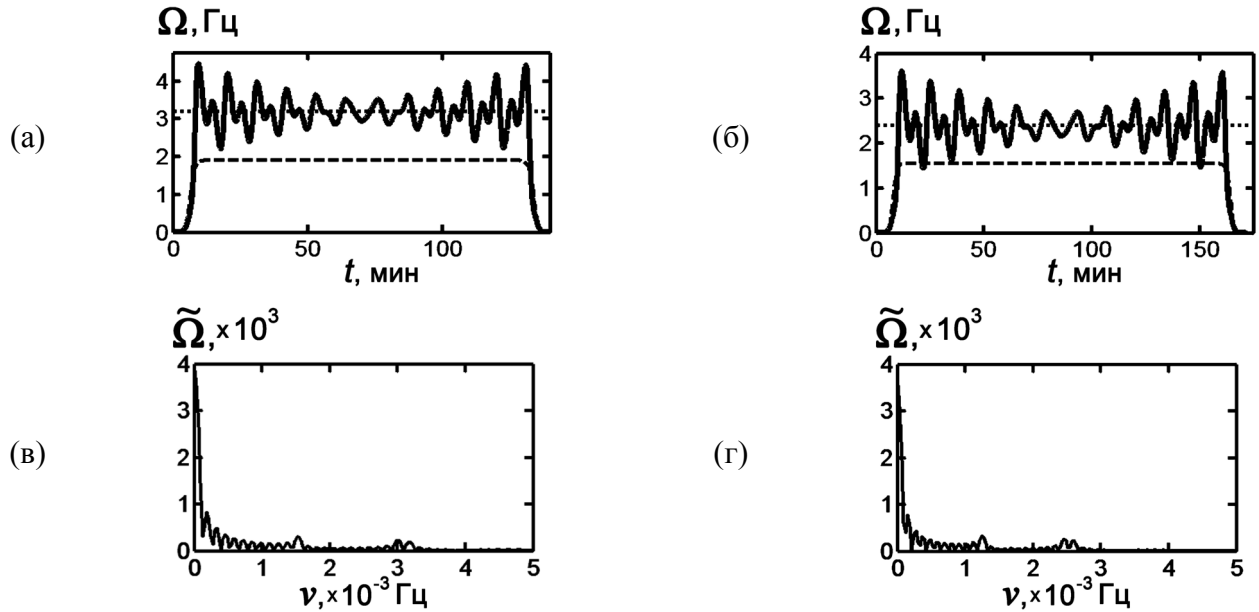
**Рис. 4.12.** Пересечение солитоном двух трасс, расположенных под углом  $\beta = 20^\circ$  друг к другу:  $S$  – источник,  $Q_1$  и  $Q_2$  – приемники,  $\alpha_1 = 40^\circ$ ,  $\alpha_2 = 20^\circ$ ,  $SQ_1$  и  $SQ_2$  – первая и вторая трассы, пунктир – волновой фронт солитона,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости солитона.

**Таблица 4.4**

Параметры	$\nu_{12}$ , Гц	$\Delta\nu$ , Гц	$\Delta\bar{\Omega}$ , Гц
Первая трасса	$1.5376 \times 10^{-3}$	–	–
Вторая трасса	$1.2650 \times 10^{-3}$	$9.8152 \times 10^{-5}$	2.3959

**Таблица 4.5**

Параметры	$v$ , м/с	$\alpha_2$ , град	$A\eta$ , м <sup>2</sup>	$ \bar{h}_{12} $ , м <sup>-1</sup>
Модельные значения	1	20	1500	$7.590 \times 10^{-3}$
Восстановленные значения	1.024	$18^\circ 54'$	1509	$7.284 \times 10^{-3}$



**Рис. 4.13.** Пересечение солитоном двух трасс, расположенных под углом  $\beta = 20^\circ$ . (а) и (в) – зависимость  $\Delta\Omega(t)$  и спектр частотных смещений  $\widetilde{\Delta\Omega}(\nu)$  при пересечении солитоном первой трассы. (б) и (г) – зависимость  $\Delta\Omega(t)$  и спектр частотных смещений  $\widetilde{\Delta\Omega}(\nu)$  при пересечении солитоном второй трассы.

#### § 4.4. Заключение

На примере интенсивных внутренних волн, являющихся в последнее время объектом пристального внимания, выполненный теоретический анализ частотных смещений и результаты численного эксперимента показывают перспективность мониторинга в условиях интенсивных неоднородностей, приводящих к взаимодействию нормальных волн. Предложен и в численном эксперименте апробирован алгоритм восстановления характеристик солитона. Более того, обнаруживается возможность не только восстанавливать параметры неоднородности, но и осуществлять мониторинг состояния невозмущенного волновода, чтобы погрешность решения обратной задачи не превышала допустимый уровень.

## ГЛАВА 5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ КАРТИНЫ ОДНОТИПНЫХ МОД

### § 5.1. Краткое введение

Как уже отмечалось, при распространении в океанических волноводах звуковое поле приобретает сложную интерференционную структуру, которая состоит из компонент, обусловленных различными группами мод. Разделение данной структуры на составляющие позволяет улучшить акустические методы мониторинга. Практический интерес к задаче выделения компонент интерференционной картины, прежде всего, связан с тем, что моды имеют разную чувствительность по отношению к различным неоднородностям среды. Это позволяет усилить или, наоборот, ослабить влияние океанических неоднородностей на вариации характеристик поля, формируемых разными группами мод.

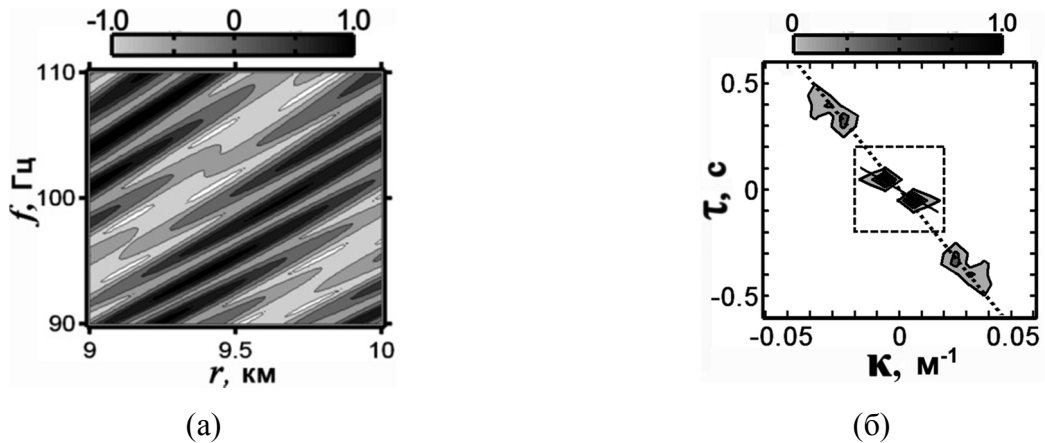
Сделаем предварительное замечание относительно словоупотребления «однотипные моды» или «моды со сходными дисперсионными характеристиками». Под данной совокупностью понимаются моды, интерференционная картина которых на плоскости «расстояние – частота»  $(r, f)$  представляет собой локализованные полосы, а угол их наклона определяет значение ИИ [10]. Подход к определению ИИ на основе углового распределения спектра интерференционной структуры поля изложен в [37]. Полосы локализованы в окрестности кривой, определяемой уравнением сохранения фазы для опорной моды, рядом с которой моды синфазны (когерентны) [12]. Данная особенность обусловлена волноводной дисперсией, т.е. различием в частотной зависимости постоянных распространения разных мод.

В данной главе предложен и апробирован метод выделения интерференционной картины, формируемой разными группами однотипных мод, который основан на различии в их дисперсионных характеристиках [78]. Практический интерес к задаче связан с тем, что моды имеют разную чувствительность по отношению к неоднородностям среды различной природы.

В параграфе 5.2 рассмотрены основные идеи метода выделения компонент интерференционной картины звукового поля в океанических волноводах, основанного на фильтрации формируемых ими локализованных областей спектра интерференционной структуры поля. Продемонстрировано применение метода для двух- и одномерных интерференционных картин соответственно в однородных волноводах. В параграфе 5.5 демонстрируется эффективность метода в задаче о регистрации частотных смещений, вызванных солитоном внутренних волн.

## § 5.2. Выделение составляющих интерференционной структуры

Интерференционная структура звукового поля представляет собой сумму компонент, каждая из которых обуславливается интерференцией отдельных групп мод и представляет собой параллельно расположенные полосы в координатах «расстояние-частота» (рис. 5.1а). Угол наклона этих полос и их ширина определяются пространственными и частотными периодами интерференции соответствующих групп мод. На спектре двумерной интерференционной структуры (рис. 5.1б) будут наблюдаться области локализации спектральной плотности, соответствующие различным компонентам интерференционной картины (рис. 5.1а). Если эти области не перекрываются, то их можно выделить путем фильтрации, и двумерным обратным преобразованием Фурье восстановить составляющие интерференционной картины, соответствующие различным группам мод. Аналогичный подход справедлив и при совмещенном приеме,  $r = \text{const}$ .



**Рис. 5.1.** Нормированная амплитуда поля  $u_n(r, f)$  (а) и модуль ее спектра  $|\tilde{u}_n(k, \tau)|$  (б). На рисунке (б) пунктиром из точек и сплошной линией показаны прямые, проходящие через начало координат и положения максимумов спектральных плотностей низших и высших мод, а пунктиром из штрихов изображен прямоугольник, являющийся пересечением прямых линий  $\tau = \pm 0.2$  с  $k = \pm 0.02$  м<sup>-1</sup>, обозначающий границы фильтра (см. (5.12), (5.13)).

Идею метода проиллюстрируем на примере невозмущенного горизонтально-однородного волновода, профиль скорости звука  $c(z)$  которого приведен на рис. 5.2. Параметры однородного поглощающего жидкого дна: скорость  $1800(1 + i0.01)$  м/с, плотность  $1.8$  г/см<sup>3</sup>. Глубина источника и приемника  $30$  м, расстояние  $r$  между ними меняется в пределах от  $r_1 = 9$  до  $r_2 = 10$  км. Частота излучения  $f$  варьируется в пределах от  $f_1 = 90$  до  $f_2 = 130$  Гц. В расчетах использовались пять мод, из них первые две с номерами  $l = 1, 2$

являются донными (низшими), три другие ( $l = 3, 4, 5$ ) – донно-поверхностными (высшими), т.е. присутствуют две группы однотипных мод.

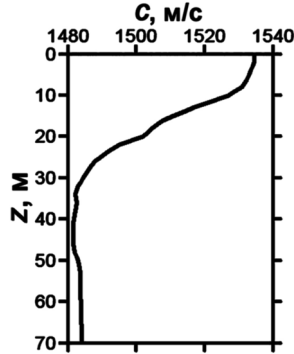


Рис. 5.2. Профиль скорости звука  $c(z)$ .

#### 5.2.1. Двумерная интерференционная картина

Рассмотрим вначале двумерную интерференционную картину. В пространственно-частотном окне  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $f_1 \leq f \leq f_2$  нормированная интерференционная составляющая поля  $u(r, f) = p(r, f) - \overline{|p(r, f)|}$ , т.е.  $u_n(r, f)$ , показана на рис. 5.1а. Здесь  $\overline{|p(r, f)|}$  – амплитуда поля  $p(r, f)$ , сглаженная по межмодовым пространственным и частотным биениям. Вне пределов окна  $p(r, f) = 0$ . Интерференционная структура поля, формируемая низшими и высшими модами, характеризуется большими и меньшими масштабами изменчивости, что приводит к модуляции интерференционной картины группой высших мод. По интерференционной картине поля ИИ  $\beta_0$  определяется как

$$\beta_0 = \frac{\Delta f / f_0}{\Delta r / r_0}, \quad (5.1)$$

где  $(f_0, r_0)$  – положение локального максимума поля;  $\Delta r = r - r_0$  и  $\Delta f = f - f_0$  – приращения расстояния и частоты соответственно, отвечающие сдвигу отслеживаемого максимума вдоль полосы [10]. В результате получаем значение  $\beta_0 = 1.2$ , характерное для группы высших мод, так что на малых расстояниях интерференционная картина формируется преимущественно группой высших мод.

Это также можно проиллюстрировать и на примере спектрального вычисления ИИ [37]. Применим двукратное преобразование Фурье  $F\{u\}$  к функции  $u(r, f)$  для определения двумерного спектра  $\tilde{u}(\kappa, \tau)$  и вычислим зависимость  $\Phi(\beta)$  от параметра  $\beta = (r_0/f_0)\text{tg}\vartheta$ :

$$\Phi(\beta) = \int_0^\infty |\tilde{u}(\kappa, \tau)|^2 \rho d\rho. \quad (5.2)$$

Здесь  $\tau = \rho \cos \vartheta$ ,  $\kappa = \rho \sin \vartheta$  – полярные координаты;  $(f_0, r_0)$  – центр пространственно-частотного окна:  $f_0 = 100$  Гц,  $r_0 = 9.5$  км. Максимум зависимости  $\Phi(\beta)$  соответствует значению  $\vartheta = \vartheta_0$ , отвечающему  $\beta_0$ . График нормированной кривой  $\Phi_n(\beta) = \Phi(\beta)/\Phi(\beta_0)$  приведен на рис. 5.3, ее максимум приходится на значение  $\beta_0 = 1.2$ . Ширина  $\delta\beta_0$  функции  $\Phi(\beta)$  определяет ошибку в определении ИИ. Ее значение на уровне 0.5 от максимума  $\delta\beta_0 = 0.41$ . Сравнение этих двух традиционных методов определения ИИ показывает, что угловой коэффициент прямой  $\operatorname{tg} \vartheta_0$ , вдоль которой достигается максимум интеграла (5.2), равен угловому коэффициенту наклона интерференционной полосы  $\Delta f / \Delta r$ , т.е.  $\operatorname{tg} \vartheta_0 = \Delta f / \Delta r$ .

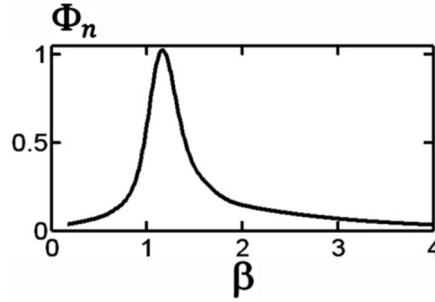
На рис. 5.1б представлен модуль нормированного спектра интерференционной структуры  $\tilde{y}_n(\kappa, \tau)$ . На нем наблюдаются две неперекрывающиеся малые области  $(\Delta\tau, \Delta\kappa)$  локализованных спектральных плотностей групп мод. По оси ординат отложена величина, обратная циклической частоте  $\omega = 2\pi f$ . Пунктиром из точек и сплошной линией показаны прямые, проходящие через начало координат и положения максимумов этих областей, которые приходятся на значения:  $|\tau_1| = 4.8 \cdot 10^{-2}$  с,  $|\kappa_1| = 7.5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>-1</sup> и  $|\tau_2| = 3.3 \cdot 10^{-1}$  с,  $|\kappa_2| = 2.6 \cdot 10^{-2}$  м<sup>-1</sup>. Здесь и далее нижние индексы “1” и “2” относятся к низшим и высшим модам соответственно. Размеры областей оцениваются как:  $\Delta\tau_1 = 1.3 \cdot 10^{-1}$  с,  $\Delta\kappa_1 = 1.9 \cdot 10^{-2}$  м<sup>-1</sup> и  $\Delta\tau_2 = 1.2 \cdot 10^{-1}$  с,  $\Delta\kappa_2 = 1.8 \cdot 10^{-2}$  м<sup>-1</sup>. Отношение максимумов спектральных плотностей  $\gamma = 0.49$ , так что энергетический вклад низших мод превалирует над весом высших мод. Однако спектральная плотность высших мод сконцентрирована на большем интервале по сравнению с низшими модами (рис. 5.1б, пунктир и сплошная линия), что обуславливает максимум функции  $\Phi(\beta)$  (5.2) только для группы высших мод. В то же время зависимость  $\tilde{y}(\kappa, \tau)$  позволяет обнаружить разные группы мод и в тех случаях, когда интегральный вклад (5.2) одной из них ослаблен по сравнению с другой. Конечно, это возможно, если их области спектральной плотности разрешаются.

Исходя из анализа распределения спектральной плотности  $\tilde{y}_n(\kappa, \tau)$ , можно модифицировать подход [37], определяя ИИ  $i$ -й группы однотипных мод как

$$\beta_{0i} = \frac{r_0 \kappa_i}{\omega_0 \tau_i}, \quad (5.3)$$

при этом погрешность  $\delta\beta_{0i}$  определяется выражением

$$\delta\beta_{0i} = \frac{r_0}{\omega_0} \frac{\Delta\kappa_i \tau_i - \Delta\tau_i \kappa_i}{(\tau_i)^2}. \quad (5.4)$$



**Рис. 5.3.** Зависимость нормированной функции  $\Phi_n$  от параметра  $\beta$ .

Согласно (5.3) и (5.4) для высших мод получаем значения  $\beta_{02} = 1.19$  и  $\delta\beta_{02} = 0.39$ , что согласуется с ранее полученными оценками. Для низших мод имеем:  $\beta_{01} = 2.36$ ,  $\delta\beta_{01} = 0.41$ . По сравнению с (5.2) алгоритм (5.3) позволяет избежать трудностей в определении ИИ в случаях, когда либо угловая спектральная плотность одной группы мод маскируется угловой спектральной плотностью другой группы, либо они сопоставимы между собой, а угловые размеры их областей перекрываются. В первом случае метод [37] не позволяет выделить вклад в интерференционную картину мод со слабым интегральным эффектом, а во втором случае, очевидно, – может приводить к значительным ошибкам в определении ИИ. В остальных случаях эти два подхода должны быть эквивалентны.

Какой физический смысл имеют координаты  $(\tau, \kappa)$  положения максимумов спектральной плотности и линейные размеры  $(\Delta\tau, \Delta\kappa)$  их локализованных областей? Для ответа на первую часть поставленного вопроса обратимся к альтернативному определению ИИ [53]

$$\beta_0 = \frac{h_{mn}(\omega_0)}{\omega_0(dh_{mn}(\omega_0)/d\omega)}, \quad (5.5)$$

где  $h_m$  – действительная часть постоянной распространения  $m$ -й моды,  $h_{mn} = h_m - h_n$ . Для однотипных мод выражение (5.5) в линейном приближении инвариантно по отношению к комбинации номеров мод [12], т.е. для номеров  $(m_1, n_1)$  и  $(m_2, n_2)$  значение  $\beta_0$  не меняется. Если воспользоваться определениями для пространственного  $\rho_{mn} = 2\pi/|h_{mn}|$  и частотного  $\Lambda_{mn} = 2\pi/r_0|dh_{mn}/d\omega|$  периодов биений мод, то это выражение нетрудно привести к виду

$$\beta_0 = \frac{r_0}{\omega_0} \frac{\Lambda_{mn}}{\rho_{mn}}. \quad (5.6)$$

Сопоставление выражений (5.3), (5.5) и (5.6) показывает, что

$$\frac{\kappa_i}{\tau_i} = \frac{|h_{mn}|}{r_0|dh_{mn}/d\omega|} = \frac{\Lambda_{mn}}{\rho_{mn}}, \quad (5.7)$$



так что положения максимумов спектральной плотности  $\kappa_i$ ,  $\tau_i$ , с точностью до постоянного коэффициента  $D$ , равны обратным величинам  $\rho_{mn}$ ,  $\Lambda_{mn}$ , т.е.  $\kappa_i = D/\rho_{mn}$ ,  $\tau_i = D/\Lambda_{mn}$ . Коэффициент  $D$  может быть найден в рамках аналитического рассмотрения двумерного преобразования Фурье  $F\{u\}$ . Очевидно, значения этого коэффициента для разных групп мод различны и зависят от номеров  $m$  и  $n$ . Если номера  $m$  и  $n$  являются минимальным и максимальным для однотипных мод, то пространственный  $\rho_{mn}$  и частотный  $\Lambda_{mn}$  периоды интерференции являются наименьшими. Для рассматриваемого модельного волновода значения постоянных распространения  $h_l$  на частоте  $f_0 = 100$  Гц и групповых скоростей  $c_{gl} = d\omega/dh_l$ , усредненных в диапазоне 90 – 130 Гц, приведены в табл. 5.1. Согласно этим данным, если воспользоваться выражениями (5.5) и (5.7), для ИИ получаем  $\beta_{01} = 2.1$  ( $m = 1$ ,  $n = 2$ ),  $\beta_{02} = 1.0$  ( $m = 3$ ,  $n = 5$ ), которые близки к значениям, полученным в рамках моделирования; при этом коэффициент  $D$  оценивается как  $D_1 \sim 28$  и  $D_2 \sim 0.9$  для низших и высших мод соответственно.

**Таблица 5.1.** Выделение групп однотипных мод в мелком море

Номер моды	Постоянная распространения $h_l$ , м <sup>-1</sup>	Групповая скорость $c_{gl}$ , м/с
1	0.4211	1478.184
2	0.4133	1465.155
3	0.4020	1438.053
4	0.3867	1390.584
5	0.3661	1328.732

При рассмотрении второй части вопроса обратимся к “соотношению неопределенностей” (т.е. размытостей) между размерами интерференционной полосы ( $\Delta r, \Delta\omega$ ) и размерами локализованной области ( $\Delta\kappa_i, \Delta\tau_i$ )

$$\Delta r \Delta\kappa_i \geq 1, \Delta\omega \Delta\tau_i \geq 1, \quad (5.8)$$

вытекающее из преобразования Фурье. Размеры  $\Delta r$  и  $\Delta\omega$  оценим из условия, что в пределах ширины полосы разность фаз между крайними однотипными модами равна  $\pi$

$$|h_{mn}(\omega_0)|\Delta r = \pi, \quad |h_{mn}(\omega_0 + \Delta\omega)|r_0 = \pi, \quad (5.9)$$

что дает, если воспользоваться линейным приближением для второго условия (5.9),

$$\Delta r = \rho_{mn}/2, \quad \Delta\omega = \Lambda_{mn}/2. \quad (5.10)$$

В результате для отношения размеров локализованной области приходим к условию (5.7)

$$\frac{\Delta\kappa_i}{\Delta\tau_i} = \frac{(1/\rho_{mn})}{(1/\Lambda_{mn})}, \quad (5.11)$$

так что  $\Delta\kappa_1/\Delta\tau_1 = 0.15 \text{ (мс)}^{-1}$ ,  $\Lambda_{12}/\rho_{12} = 0.14 \text{ (мс)}^{-1}$  и  $\Delta\kappa_2/\Delta\tau_2 = 0.15 \text{ (мс)}^{-1}$ ,  $\Lambda_{35}/\rho_{35} = 6.8 \cdot 10^{-2} \text{ (мс)}^{-1}$ .

Таким образом, положения максимумов спектральной интенсивности и границы области их локализации определяются пространственными и частотными периодами интерференции однотипных мод.

Вне областей локализации спектр интерференционной структуры практически подавлен (рис. 5.1б), поэтому наибольшую информацию об интерференционной картине однотипных мод он содержит в узких спектральных окнах ( $\Delta\tau$ ,  $\Delta\kappa$ ). Отфильтровывая эти области и выполняя обратное двукратное преобразование Фурье  $F^{-1}\{\tilde{u}\}$ , получаем амплитуды полей, соответствующих различным группам однотипных мод (рис. 5.4а, 5.4в). Для низших мод использовалась фильтрация в окне

$$\mu(\kappa, \tau) = \begin{cases} 1, \text{ если } |\kappa| \leq 0.02 \text{ м}^{-1}, |\tau| \leq 0.2 \text{ с}, \\ 0, \text{ если } |\kappa| > 0.02 \text{ м}^{-1}, |\tau| > 0.2 \text{ с}, \end{cases} \quad (5.12)$$

а для фильтрации высших мод – в окне

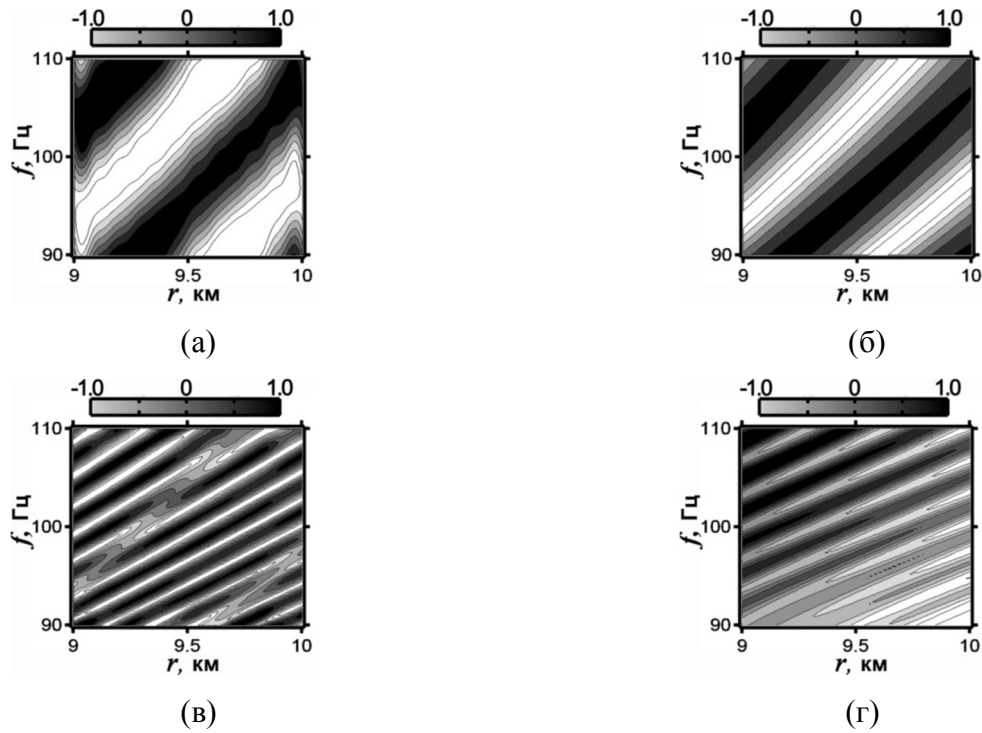
$$\eta(\kappa, \tau) = \begin{cases} 1, \text{ если } |\kappa| \geq 0.02 \text{ м}^{-1}, |\tau| \geq 0.2 \text{ с}, \\ 0, \text{ если } |\kappa| < 0.02 \text{ м}^{-1}, |\tau| < 0.2 \text{ с}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Границы фильтра, являющиеся пересечением прямых линий  $\tau = \pm 0.2 \text{ с}$  и  $\kappa = \pm 0.02 \text{ м}^{-1}$ , на рис. 2б показаны штрих-пунктиром. Для сравнения на рис. 5.4б, 5.4г изображено поле для случаев распространения двух низших и трех высших мод. Оно соответствуют ИИ: для группы низших мод  $\beta_{01} = 2.1$  (рис. 5.4а) и  $\beta_{01} = 2.0$  (рис. 5.4б); для группы высших мод  $\beta_{02} = 1.2$  (рис. 5.4в) и  $\beta_{02} = 0.9$  (рис. 5.4г). Значения ИИ восстановленных интерференционных структур близки к значениям, которые имели бы место в случае распространения низших или высших мод. Разумеется, выделение групп однотипных мод эффективно, если спектральные плотности  $\tilde{u}(\kappa, \tau)$  локализованы в неперекрывающихся областях, а фильтры обладают достаточно резко ограниченными полосами, целиком расположенными в этих областях.

### 5.2.2. Одномерная интерференционная картина

Обратимся теперь к интерференционной картине, формируемой в точке приема на расстоянии  $r_0 = 10 \text{ км}$  от источника. На рис. 5.5а и 5.5б изображены нормированный спектр  $u_n(r_0, f)$  и связанный с ним однократным преобразованием Фурье нормированный модуль отклика сигнала  $\tilde{u}_n(r_0, \tau)$ . Наложение двух групп мод приводит к низкочастотной и высокочастотной модуляции сигнала (рис. 5.5а), что обуславливает два неперекрывающихся пика (рис. 5.5б). Первый из них (максимальный), расположенный в окрестности  $\tau_1 = 3.8 \cdot 10^{-2}$

с и обладающий шириной  $\Delta\tau_1 = 6.7 \cdot 10^{-2}$  с, соответствует крупномасштабным низкочастотным изменениям с квазипериодом  $\Delta f_1 \approx 18.4$  Гц, отвечающим низшим модам. Второй пик сосредоточен в окрестности  $\tau_2 \approx 0.34$  с, имеет ширину  $\Delta\tau_2 \approx 0.12$  с и обусловлен мелкомасштабными высокочастотными изменениями с квазипериодом  $\Delta f_2 \approx 2.4$  Гц, отвечающим низшим модам. Информация о низших и высших модах, как и в случае двумерной интерференционной картины, сконцентрирована в узких неперекрывающихся окнах  $\Delta\tau$ . Отношение максимумов пиков  $\gamma = 0.43$ .



**Рис. 5.4.** Нормированные амплитуды поля  $u_n(r, f)$  низших (а), (б) и высших (в), (г) мод. Интерференционные структуры (а) и (в) получены с использованием фильтров (8) и (9), а (б) и (г) соответствуют двух- и трехмодовому режиму распространения.

Интервал между максимумами  $\tau_{21} = |\tau_1 - \tau_2| \approx 0.30$  с естественно трактовать как разность времен прихода сигнала  $\Delta\tau$  по опорным модам, номера которых равны  $l = 2$  и  $l = 4$  для низших и высших мод соответственно,  $\Delta\tau = r_0 \left| \left[ (c_{g4})^{-1} - (c_{g2})^{-1} \right] \right|$ . Согласно данным таблицы имеем  $\Delta\tau \approx 0.37$  с, что всего лишь в 1.2 раза превышает значение  $\tau_{21}$ . Это показывает, что возможности общепринятого подхода к томографии океана, основанного на измерении задержек модовых импульсов [1], могут быть расширены измерениями времен задержек между группами одноподобных мод, что приводит, очевидно, к возрастанию помехоустойчивости. Полагая, что одноподобные моды имеют одинаковую амплитуду, выигрыш

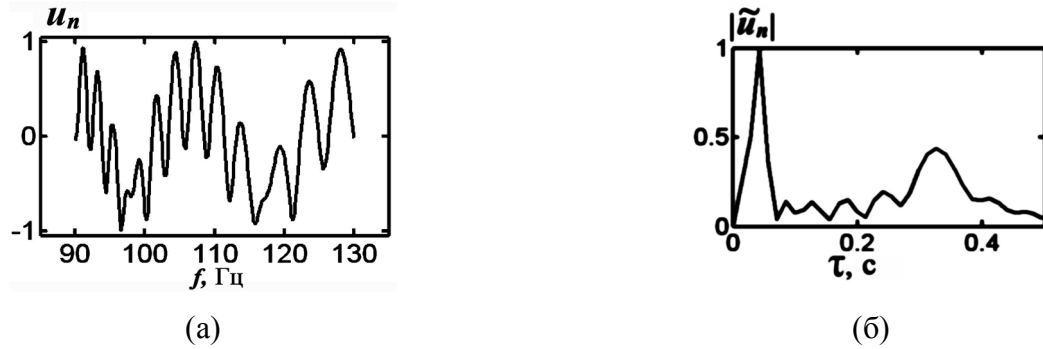
грубо оценивается как квадрат их числа, что делает его сопоставимым с выигрышем, достигаемым при подходе к диагностике, основанном на информации о частотных смещениях [12].

Основываясь на физическом представлении величины  $\tau_{21}$ , изложим простую идею нового подхода к пассивной диагностике источников сигналов. Пусть два приемника расположены на разных расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от шумящего источника и известны групповые скорости  $c_{gl}$  невозмущенного волновода. Выделяя группы однотипных мод, можно по смещениям их максимумов  $\Delta\tau_{1,2}$  найти горизонтальные расстояния  $r_1$  и  $r_2$  и тем самым вычислить местоположение источника относительно приемников. Если источник перемещается, то значения  $\Delta\tau_{1,2}$  изменяются, что позволяет определить его скорость и траекторию. Возмущения среды могут вносить ошибки в групповые скорости  $c_{gl}$ . Поправки к ним, обусловленные неоднородностями, можно определить по измерениям частотных смещений выделенных групп мод [12]. Предлагаемый подход может быть применен как к искусственным объектам (надводным и подводным судам), так и к морским млекопитающим (китам, тюленям и т.д.), что позволяет осуществлять и экологический мониторинг. Шумы каждого типа судна, как и млекопитающих, индивидуальны, поэтому по их спектру можно определять тип объекта или вид морского животного. Возможности применения данного подхода к распознаванию нескольких источников определяются разрешением их локализованных спектральных областей.

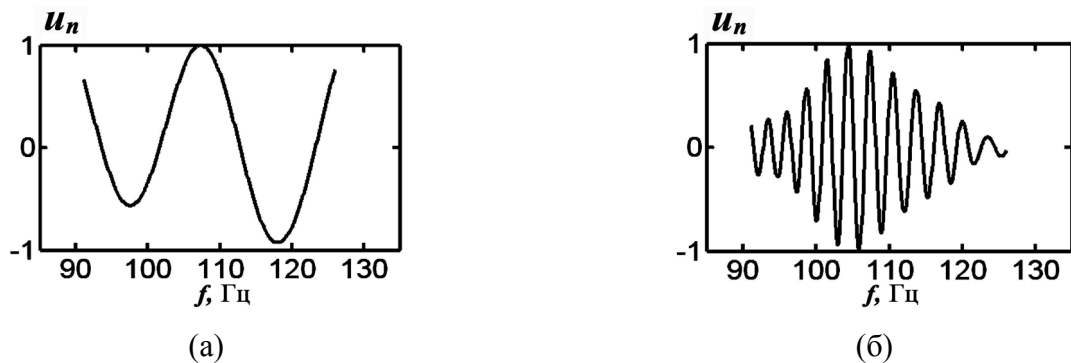
Выделим пики отклика сигнала с помощью фильтрующих временных окон

$$g(\tau) = 1, \quad 0 \leq \tau \leq 0.1 \text{ с}; \quad g(\tau) = 1, \quad 0.25 \text{ с} \leq \tau \leq 0.45 \text{ с} \quad (5.14)$$

для низших и высших мод соответственно. Вне указанных интервалов весовая функция  $g$  обращается в нуль. Далее выполним однократное обратное преобразование Фурье. В результате получаем спектры сигналов для низших (рис. 5.6а) и высших (рис. 5.6б) мод с характерными частотными масштабами изменчивости  $\Delta f_1 = 20.2 \text{ Гц}$  и  $\Delta f_2 = 2.8 \text{ Гц}$  соответственно. Таким образом, предложенный метод выделения компонент интерференционной структуры, соответствующим группам однотипных мод, на стационарной трассе, исключая их взаимное влияние, т.е. разделяет их вклад в спектральный интервал  $(f, f + df)$ .



**Рис. 5.5.** Нормированные спектр  $u_n(r_0, f)$  (а) и модуль отклика сигнала  $|\tilde{u}_n(r_0, \tau)|$  (б), формируемые пятью модами.



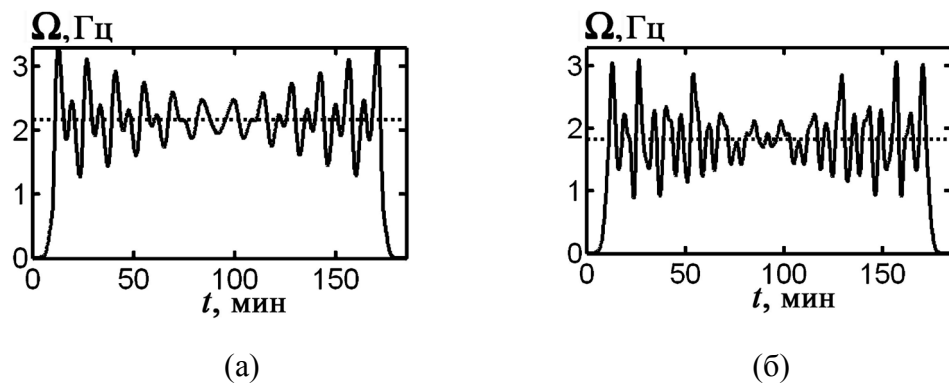
**Рис. 5.6.** Нормированные спектры  $u_n(r_0, f)$ , получаемые с использованием фильтров (14): низшие моды (а), высшие моды (б).

### § 5.3. Частотные смещения однотипных мод

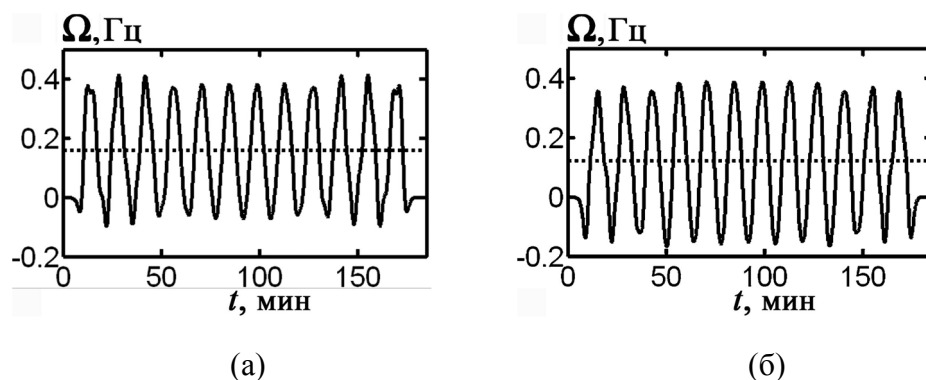
Формулы, использующиеся при решении обратной задачи в главе 4, были получены для маломодового режима распространения. В реальных условиях, как правило, возбуждаются и высшие, донно-поверхностные моды. В этом случае для решения обратной задачи необходимо выделить низшие моды из общего поля. Для этого, например, можно использовать протяженные антенны, перекрывающие весь волновод. Однако можно воспользоваться методом, предложенным в данной главе, который не требует использования протяженных антенн и, тем самым, более применим на практике.

Продemonстрируем эффективность метода применительно к измерениям частотных смещений групп однотипных мод, вызванных движением солитона внутренней волны (солитона) вдоль стационарной акустической трассы. Рассмотрим одиночный солитон, амплитудой  $A = 15$  м, полушириной  $\eta = 100$  м, движущийся со скоростью  $v = 1$  м/с вдоль трассы протяженностью  $r_0 = 10$  км. При таких значительных возмущениях существенны эффекты межмодового взаимодействия.

На рис. 5.7, 5.8 представлены частотные смещения (сплошная линия), вызванные двумя группами мод, а пунктиром изображено их среднее значение. Для простоты на рис. 5.7а, 5.8а воспроизведена ситуация, когда распространяются только низшие и высшие моды, так как частотные смещения обусловлены преимущественно взаимодействием соседних мод. Рисунки 5.7б, 5.8б иллюстрируют возможности низкочастотной и высокочастотной фильтрации применительно к полю из пяти распространяющихся мод. Как видно, данный метод выделения компонент интерференционной структуры хорошо воспроизводит частотные смещения отдельных групп. Частотные смещения низших мод на порядок превышают частотные смещения высших мод. Если регистрировать частотные смещения поля, формируемого всеми распространяющимися модами, то частотные смещения низших мод будут промоделированы частотными смещениями высших мод, которые следует рассматривать как помеху. Поэтому разделение интерференционной структуры на компоненты позволяет избежать трудностей, связанных с наложением составляющих поля, формируемых взаимодействием мод, и, тем самым, повысить точность измерений частотных смещений, что актуально при решении обратной задачи [3].



**Рис. 5.7.** Частотные смещения: группа низших мод (а); низкочастотная фильтрация поля, сформированного из пяти мод (б).



**Рис. 5.8.** Частотные смещения: группа высших мод (а); высокочастотная фильтрация поля, сформированного из пяти мод (б).

## § 5.4. Заключение

Предложен метод выделения интерференционной картины, формируемой разными группами однотипных мод, который основан на различии в их дисперсионных характеристиках. Работоспособность данного метода продемонстрирована на примерах двумерной и одномерной интерференционных картин, формируемых двумя группами мод. Получены оценки положения максимумов спектральной плотности и размеров их областей локализации. Проиллюстрирована чувствительность выделенных групп мод к частотным сдвигам, обусловленным движением солитона вдоль трассы. Практическая важность метода состоит в том, что он позволяет получать информацию о модовой структуре звукового поля и изучать влияние океанических неоднородностей на них.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Установлена связь пространственного спектра частотных смещений звукового поля с двумерным анизотропным спектром флуктуаций дисперсионной характеристики волновода, вызванных океаническими неоднородностями. На ее основе получено выражение для среднего квадрата разности фаз в случае поперечного разнесения точек наблюдения.

2. В численном эксперименте показано, что при типичных характеристиках океанического шельфа в условиях летней и зимней гидрологий в диапазоне частот (150–370 Гц) и интервале расстояний (10–100 км) развитое ветровое волнение (скорость ветра 9–12 м/с) не приводит к разрушению локализованной интерференционной картины, а лишь незначительно снижает ее контрастность.

3. Получено выражение для функции, которая связывает временные спектры частотных смещений звукового поля и высокочастотного возмущения океанической среды. Для ветрового волнения в широком угловом интервале ориентации трассы относительно направления максимума углового спектра возмущения предложена эталонная функция, позволяющая восстанавливать временной спектр поверхностного волнения по измеренному временному спектру частотных смещений звукового поля.

4. Аналитически и численно решена задача о частотных смещениях звукового поля, вызванных движением солитона внутренних волн в океанической среде, когда существенны эффекты межмодовой трансформации. Проанализированы вариации частотных смещений в зависимости от направления движения солитона по отношению к акустической трассе, амплитуды, ширины и скорости солитона. Разработан и численно апробирован алгоритм решения обратной задачи восстановления характеристик движущегося солитона.

5. Предложен и в численном эксперименте реализован метод выделения интерференционной структуры поля, формируемой разными группами однотипных мод, который основан на различии в их дисперсионных характеристиках. Оценены положения максимумов спектральной плотности и размеры областей локализации таких групп мод. Продемонстрирована чувствительность интерференционной структуры выделенной группы мод к возмущению среды распространения, обусловленной солитоном внутренних волн.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаров В.В., Зайцев В.Ю., Куртепов В.М., Нечаев А.Г., Хилько А.И. Акустическая томография океана. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997. 255 с.
2. Munk W., Worcester P., Wunsch C. Ocean Acoustic Tomography. Cambridge University Press, 1995. 433 p.
3. Munk W., Wunsch C. Ocean Acoustic Tomography: Rays and Modes // Rev. Geophys and Space Phys. 1983. V. 21. No. 4. P. 777-793.
4. Rychagov M.N., Ermert H. Reconstruction of Fluid Motion in Acoustic Diffraction Tomography // J. Acoust. Soc. Amer. 1996. V. 99. No. 5. P. 3029-3035.
5. Norton S.J. Fluid Flow Imaging by Means of Wide-Band Diffraction Tomography // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. No. 5. P. 2717-2721.
6. Буров В.А., Попов А.Ю., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. Акустическая томография океана при использовании нестандартного представления рефракционных неоднородностей // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 5. С. 602-613.
7. Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Любавин Л.Я. Восстановление средней температуры океана по измерениям времени пробега звуковых импульсов // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 2. С. 216-225.
8. Буров В.А., Сергеев С.Н., Шмелев А.А. Возможность восстановления сезонной изменчивости мирового океана методами акустической томографии // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 3. С. 302-312.
9. Буров В.А., Грачева Т.В., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. Двумерная модель томографического восстановления океанических неоднородностей при волновом и лучевом описании акустического поля // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 2. С. 291-306.
10. Чупров С.Д. Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане // Акустика океана. Современное состояние. Под ред. Л.М. Бреховских и И.Б. Андреевой. М.: Наука, 1982. С. 71-91.
11. Грачев Г.А. К теории инвариантов акустического поля в слоистых волноводах // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 1. С. 67-71.
12. Kuz'kin V.M., Lyakhov G.A., Pereselkov S.A. Method for measuring the frequency shifts of interference maxima in monitoring of dispersion media: theory, implementation, and prospects // Phys. Wave Phenom. 2010. V. 18. No. 3. P. 196-222.

13. Кузькин В.М., Лин Й.-Т., Луньков А.А., Линч Дж.Ф., Петников В.Г. Частотные смещения интерференционной структуры звукового поля в летний период времени на океанском шельфе // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 3. С. 387-397.
14. Кузькин В.М., Огурцов А.В., Петников В.Г. Влияние гидродинамической изменчивости на частотные смещения интерференционной структуры звукового поля в мелком море // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 1. С. 94-100.
15. Turgut A., Orr M., Pasewark B. Acoustic monitoring of the tide height and slope-water intrusion at the New Jersey Shelf in winter conditions // J. Acoust. Soc. Amer. 2007. V. 121. No. 5. P. 2534-2541.
16. Turgut A., Orr M., Rouseff D. Broadband source localization using horizontal-beam acoustic intensity striations // J. Acoust. Soc. Am. 2010. V. 127. N. 1. P. 73-83.
17. Кузькин В.М., Пересёлков С.А. Применение фокусировки обращенного волнового поля для восстановления частотного спектра фоновых внутренних волн // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 6. С. 833-838.
18. Кузькин В.М., Луньков А.А., Пересёлков С.А. Корреляционный метод измерения частотных сдвигов максимумов звукового поля, вызванных возмущениями океанической среды // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 5. С. 655-661.
19. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 364 с.
20. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
21. Буров В.А., Сергеев С.Н. Современные методы теории возмущения при расчете гидроакустических полей // Вестн. МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 1992. Т. 33. № 2. С. 49-56.
22. Кузькин В.М., Куцов М.В., Пересёлков С.А. Интерференция нормальных волн в мелком море. Труды ИОФАН. М.: Наука, 2013. Т. 69. С. 171-198.
23. Исакович М. А. Общая акустика. Москва: Наука, 1973: 496 с.
24. Кацнельсон Б.Г., Петников В.Г. Акустика мелкого моря. М. 1997: 191 с.
25. Лазарев В.А., Петухов Ю. В. Интерференционная структура широкополосного звука в неоднородном по трассе волноводе // Акуст. журн. 1988. Т. 34. №3. С. 553-555.
26. Бородина Е.Л., Петухов Ю.В. Влияние стратификации скорости звука в осадочном слое дна на формирование интерференционной структуры акустического поля в мелком море //

- Сборник трудов 1й Всероссийской акустической конференции, г. Москва, 6-9 октября 2014 г. С. 58-65.
27. Коняев К.В., Сабинин К.Д., Сабинин К.Д. Волны внутри океана. СПб: Гидрометеиздат, 1992: 271 с.
  28. Кузькин В.М., Лаврова О.Ю., Пересёлков С.А., Петников В.Г., Сабинин К.Д. Анизотропное поле фоновых внутренних волн на морском шельфе и его влияние на распространение низкочастотного звука // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 1. С. 74-86.
  29. З.К., Абузаров, Морское волнение и его прогнозирование. Л.:Гидрометеиздат, 1981. 168 с.
  30. В.Дж., Пирсон, Ветровые волны. - в кн.: Ветровые волны. Перевод с англ. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. С. 42-124.
  31. Лобанов В.Н., Петухов Ю. В. Пространственно-частотное распределение интенсивности широкополосного звука в мелком море // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 6. С. 1093-1106.
  32. Бородина Е.Л., Петухов Ю.В. Пространственно-частотная интерференционная структура акустических полей в океанических волноводах // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 3. С. 313-319.
  33. Чупров С.Д., Мальцев Н.Е. Инвариант пространственно-частотной интерференционной структуры звукового поля в слоистом океане // ДАН СССР. 1981. Т. 257. № 2. С. 475-479.
  34. Орлов Е.Ф. Интерференционная структура широкополосного звука в океане // Проблемы акустики океана. Под ред. Л.М. Бреховских и И.Б. Андреевой. М.: Наука, 1984. С. 85-93.
  35. Кузькин В.М. Осцилляции спектральной интенсивности звукового поля в случайно-неоднородной океанической среде // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 365-372.
  36. Кулаков В.Н., Мальцев Н.Е., Чупров С.Д. О возбуждении групп мод в слоистом океане // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 1. С. 74-79.
  37. Rouseff D. Effect of shallow water internal waves on ocean acoustic striation patterns // Waves Random Media. 2001. V. 11. P. 377-393.
  38. Кузькин В.М. Частотные смещения интерференционной структуры звукового поля в мелком море // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 2. С. 258-263.
  39. Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A., Petnikova E.A. The possibility of reconstruction of two-dimensional random inhomogeneities in a shallow sea by frequency shifts of the spatial interference structure of the sound field // J. Phys. Wave Phenom. 2008. V. 1. No. 1. P.42-51.
  40. Кузькин В.М., Луньков А.А., Пересёлков С.А. Частотные смещения максимумов звукового

- поля, вызванные интенсивными внутренними волнами // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 3. С. 342-349.
41. Кузькин В.М., Луньков А.А. Частотные смещения максимумов звукового поля в океанических волноводах // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 5. С. 649-654.
  42. Кузькин В.М., Пересёлков С.А. Методы регистрации частотных смещений интерференционной структуры звукового поля в океанических волноводах // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 505-515.
  43. Кузькин В.М., Пересёлков С.А. Акустический мониторинг фоновых внутренних волн с использованием корреляционного метода измерений частотных сдвигов интерференционных максимумов // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 4. С. 501-508.
  44. Turgut A., Orr M. Broadband source localization using horizontal-beam acoustic intensity striations // J. Acoust. Soc. Amer. 2010. V. 127. No. 1. P. 73-83.
  45. Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A. Reconstruction of Spectrum of Background Internal Waves // Phys. Wave Phenom. 2006. V. 14. N. 4. P. 52-65.
  46. Кузькин В.М., Пересёлков С.А. Восстановление пространственного спектра изотропного поля фоновых внутренних волн // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 1. С. 74-81.
  47. Кузькин В.М., Пересёлков С.А. Восстановление пространственного спектра анизотропного поля фоновых внутренних волн // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 2. С. 193-197.
  48. Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A. Acoustic Monitoring of Frontal Zone // Physics of Wave Phenomena. 2010. V. 18. N. 1. P. 64-74.
  49. Kuz'kin V.M. Error of the local sound field's maximum frequency shifts in shallow water // Acoust. Phys. 2009. V. 6. No. 6. P. 771-775.
  50. Kuz'kin V.M. Propagation and Resolution of Pulse Signals in Oceanic Waveguides // Physics of Wave Phenomena. 2009. V. 17. N. 1. P. 56-65.
  51. Любавин Л.Я., Нечаев А.Г. Акустическая интерференционная томография океана // Акуст. журн. 1989. Т.35, №4. С. 703-709.
  52. Елисеев В.А., Выделение нормальных волн в мелком море вертикальной линейной антенной // Акуст. журн. 1986. Т. 32, №1. С. 54-60.
  53. Кузькин В.М. Влияние изменчивости стратификации океана на интерференционную структуру звукового поля // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 2. С. 344-345.
  54. Гринюк А.В., Бурдуковская В.Г., Зверев В.А., Кравченко В.Н., Коваленко В.В., Лучинин

- А.Г., Малеханов А.И., Трофимов А.Т., Трусова О.И., Смирнов И.П., Стромков А.А., Хилько А.И. Экспериментальное исследование модовой селекции в мелком море // Акуст. журн. Т. 58. № 3. С. 316-329.
55. Кузькин В.М., Куцов М.В., Пересёлков С.А. Пространственная интерференция нормальных волн в океанических волноводах // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 376-383.
  56. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1976. 464 с.
  57. Кузькин В.М., Пересёлков С.А. Влияние фоновых внутренних волн на интерференционную структуру звукового поля в мелком море // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 103-112.
  58. Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A. Effect of intense waves on the sound field interference structure // J. Phys. Wave Phenom. 2010. V. 18. No. 3. P. 223-229.
  59. Кузькин В.М., Куцов М.В., Пересёлков С.А. Влияние поверхностного волнения на изменчивость интерференционного инварианта // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 1. С. 76-80.
  60. Кравцов Ю.А., Кузькин В.М. Протяженные антенны в океанических волноводах // Распространение волн в слоистых средах. IX Всесоюзная школа по дифракции и распространению волн / Под ред. Б.Е. Кинбера. Казань: Авиационный институт, 1988. С. 114-144.
  61. Луньков А.А., Петников В.Г. Когерентность низкочастотного звука в мелком море при наличии внутренних волн // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 1. С. 65-75.
  62. Kuz'kin V. M., Kutsov M. V., Pereselkov S. A. Frequency shifts initiated by surface roughness // Phys. Wave Phenom. 2014. V. 22. N. 2. P. 144-149.
  63. Turgut A., Mignerey P.C., Goldstein D.J., Schindall J.A. Acoustic observations of internal tides and tidal currents in shallow water // J. Acoust. Soc. Am. 2013. V. 133. No. 4. P. 1981-1986.
  64. Пересёлков С.А. Распространение низкочастотного звука в случайно-неоднородном мелководном океаническом волноводе. Дис. ... д.ф.-м.н. Воронеж: ВГУ, 2011.
  65. Бункин Ф.В., Воляк К.И., Ляхов Г.А., Паненко В.В., Шуган И.В. Трассовые измерения морского волнения самолетным локатором бокового обзора // Исследования Земли из космоса. 1983. № 5. С. 22-31.
  66. Kuz'kin V.M., Kutsov M.V., Pereselkov S.A. Frequency shifts of sound field maxima in few-mode propagation, which are initiated by internal wave solitons // Phys. Wave Phenom. 2013. V. 21. N. 2. P. 139-151.
  67. Лучинин А.Г., Хилько А.И. Низкочастотная акустическая томография мелкого моря с

- использованием маломодовых импульсов // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 2. С. 228-241.
68. Хилько А.И., Лучинин А.Г., Бурдуковская В.Г., Смирнов И.П. Маломодовая томография неоднородностей мелкого моря // Акуст. журн. 2007. Т.53. № 3. С. 437-450.
  69. Кузькин В.М., Пересёлков С.А. Восстановление внутренних волн в океанических волноводах // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 395-400.
  70. Badiey M. et al. Temporal and Azimuthal Dependence of Sound Propagation in Shallow Water With Internal Waves // IEEE. J. Ocean. Eng. 2002. V. 27. P. 117-129.
  71. Кацнельсон Б.Г., Пересёлков С.А. Горизонтальная рефракция низкочастотного звукового поля, вызванная солитонами внутренних волн в мелководном волноводе // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 6. С. 779-788.
  72. Badiey M., Katsnelson B.G., Lynch J., Pereselkov S.A., Siegmanna W. Measurement and Modeling of Three-Dimensional Sound Intensity Variations Due to Shallow Water Internal Waves // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117. No. 2. P.613-625.
  73. Кацнельсон Б.Г., Бади М., Линч Дж. Горизонтальная рефракция звука в мелком море и ее экспериментальные наблюдения // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 3. С. 362-376.
  74. Badiey M., Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г., Lynch J. Временные флуктуации звукового поля, обусловленные взаимодействием мод в мелком море в присутствии внутренних волн / Сб. докл. XI школы-семинара им. акад. Л.М. Бреховских, совмещенной с XVII сессией РАО. Москва: ГЕОС, 2006. С. 27-30.
  75. Григорьев В.А., Кацнельсон Б. Г. Флуктуации интенсивности высокочастотных акустических импульсов, вызванных движением солитонов внутренних волн //Акуст. журн. 2009. Т.55. №1. С. 47-55.
  76. Григорьев В.А., Кацнельсон Б. Г Флуктуации звука, обусловленные взаимодействием мод на движущихся нелинейных волнах в мелком море //Акуст. журн. 2014. Т.60. №3. С. 262-271.
  77. Katsnelson B.G., Grigorev V.A., Lynch J.F. Intensity Fluctuations of Midfrequency Sound Signals Passing Through Nonlinear Internal Waves // J. Acoust. Soc. Am. EL. 2008. V. 124. No. 3. P. 78-84.
  78. Кузькин В.М., Куцов М.В., Пересёлков С.А. Выделение групп однотипных мод в мелком море //Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 5. С. 735-743.